Lineare Algebra und Geometrie 1

SS 2021, K. Auinger, 24.11.2021
Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14

Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computeralgebraprogramme wie Mathematica oder GeoGebra und dergleichen erlaubt. Ein elektronisches Schreibtablet zum Erstellen des pdf-Files darf natürlich verwendet werden.

(a) Für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

finde man eine orthogonale Matrix S, die A diagonalisiert, dh es soll $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix sein. (4P)

(b) Sind die Matrizen A und B (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die entsprechende diagonalisierte Form und eine Basis aus Eigenvektoren an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Begründungen angeben! Alle Rechenoperationen müssen „mit der Hand“ durchgeführt werden und nachvollziehbar dargestellt werden.) (4P)

(c) Definieren Sie den Begriff der Spiegelung σ_U an einem einem Teilraum U eines Euklidischen Raumes E und bestimmen Sie $\det \sigma_U$. (4P)

(d) Man bestimme für beliebige $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & z & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine genaue Begründung und alle Berechnungsschritte an. (4P)