Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
UE Lineare Algebra und Geometrie 1
SoSe 2021
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zur Linearen Algebra und Geometrie 1

Sommer-Semester 2021, K. Auinger

1. Wiederholen Sie die Definition des *Dualraums* V^* eines Vektorraums V und des *Annihilators* U° eines Teilraums U von V.
2. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f \in V^*$ ein lineares Funktional $f \neq \Theta$. Man zeige: $V = (\ker f) \oplus [v]$ für jedes $v \notin \ker f$.
3. Für den Vektorraum $\mathcal{P}_2$ aller reellen Polynomfunktionen mit Grad ≤ 2 betrachten wir für $i = 1, 2, 3$ die linearen Funktionale $\varphi_i \in \mathcal{P}_2^*$, definiert durch $\varphi_i(p) = \int_0^i p(t)dt$. Man zeige, dass $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ eine (geordnete) Basis von $\mathcal{P}_2^*$ ist; man finde jene Basis (p_1, p_2, p_3) von $\mathcal{P}_2$, zu der $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ die duale Basis ist. (Hinweis: hier ist es hilfreich, einen geeigneten Isomorphismus $\mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ zu betrachten; die Funktionale können dann durch Zeilenvektoren dargestellt werden.)
4. Sei U ein endlichdimensionaler Vektorraum, der direkte Summe zweier Teilräume V und W ist, dh es gilt $U = V \oplus W$; man zeige, dass dann auch $U^* = V^\circ \oplus W^\circ$ gilt.
5. Seien $U := [(1,1,0,0)^T, (2,1,1,0)^T, (2,2,1,1)^T]$ und $V := [(1,1,2,2)^T, (0,1,1,2)^T, (0,0,1,1)^T]$ Teilräume des $\mathbb{Q}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.
6. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wiederholen Sie die Definition der dualen Abbildung $\varphi^*\colon W^* \to V^*$. Identifizieren Sie die beiden Räume V und W mit ihren Bidualräumen V^{**} und W^{**} und zeigen Sie, dass (unter dieser Voraussetzung) $\varphi^{**} = \varphi$ gilt.

   In den folgenden drei Beispielen sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.
7. Sei $\dim V = n$ und $M \subseteq V$ ein k-dimensionaler Teilraum mit Basis $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Zeigen Sie: für Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-k} \in V$ ist $\{v_1 + M, \ldots, v_{n-k} + M\}$ genau dann eine Basis von V/M, wenn $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ eine Basis von V ist.
8. Sei $M \subseteq V$ ein Teilraum und $\iota\colon M \to V$ die Einbettung, dh $\iota(m) = m$ für alle $m \in M$. Zeigen Sie: die duale Abbildung $\iota^*\colon V^* \to M^*$ erfüllt $\iota^*\colon \varphi \mapsto \varphi|_M$ (Einschränkung von φ auf M) für alle $\varphi \in V^*$ und ist surjektiv. Was ist $\ker \iota^*$?
9. Sei M wieder ein Teilraum von V und $\pi\colon V \to V/M$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie: $\pi^*\colon (V/M)^* \to V^*$ is injektiv (also eine Einbettung von $(V/M)^*$ in V^*). Was ist $\mathrm{Im}\pi^*$?
10. Für $n \geq 1$ sei $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie: die Gruppe S_n aller Permutationen von $[n]$ hat $n!$ Elemente. Für $n \geq 3$ ist S_n nicht kommutativ.
11. Bestimmen sie A_3, die Menge der geraden Permutationen von S_3 und überprüfen Sie, dass für jede Transposition τ von S_3 gilt: $\tau A_3 = U_3$ $(= S_3 \setminus A_3)$.
12. Seien $n > 1$ und $\pi \in S_n$; ein Paar (i, j) mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i < j$ heißt *Inversion* von π falls $\pi(i) > \pi(j)$. Man bestimme die Menge der Inversionen einer Transposition (ij).
13. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ sei $\mathrm{inv}\pi$ die Anzahl der Inversionen von π. Man zeige, dass für jede Permutation π gilt: $\mathrm{sgn}\pi = (-1)^{\mathrm{inv}\pi}$.
14. Zeigen Sie, dass für jede Permutation $\pi \in S_n$ gilt:

$$\mathrm{sgn}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{sign}(\pi(j) - \pi(i)),$$

   wobei sign die Signumfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet.
15. Zeigen Sie, dass A_n (die Menge der geraden Permutationen von $[n]$) eine normale Untergruppe von S_n bildet (dh eine Untergruppe, für die für alle $\pi \in S_n$ gilt: $\pi^{-1} A_n \pi = A_n$).

16. Für $\pi \in S_n$ sei $\operatorname{supp}(\pi)$ definiert als die Menge aller Elemente $i \in [n]$, für die $\pi(i) \neq i$ gilt ($\operatorname{supp}(\pi)$ heißt *Träger* von π). Zeigen Sie: je zwei Permutationen $\pi, \sigma \in S_n$ mit disjunkten Trägern (dh $\operatorname{supp}(\pi) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$) kommutieren.

17. Bestimmen Sie das Vorzeichen, die Zyklenzerlegung und die Menge der Inversionen der folgenden Permutationen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Sei A eine schiefsymmetrische reelle $n \times n$-Matrix (d. h. $A^T = -A$). Zeigen Sie: ist n ungerade, dann ist $\det A = 0$.

19. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen jeweils auf drei Arten (mittels elementarer Umformungen, Entwicklung nach einer Zeile, Entwicklung nach einer Spalte):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

20. Zeigen Sie, dass die Gleichung der Geraden in der Ebene durch die beiden Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2) gegeben ist durch
$$\det \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
und verwenden Sie dies, um eine notwendige und hinreichende Bedingung zu formulieren, dass drei gegebene Punkte $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ der Ebene auf einer Geraden liegen.

21. Sei $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ eine $n \times n$-Matrix, wobei B eine $k \times k$-Matrix ist, D eine $(n-k) \times (n-k)$-Matrix und 0 ausschließlich Nullen enthält. Zeigen Sie: $\det A = (\det B)(\det D)$. (Dies kann zB durch Induktion nach k gezeigt werden.)

22. Finden Sie eine ähnliche Formel für die Determinante einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$, wobei hier B und C jeweils $k \times k$ bzw. $(n-k) \times (n-k)$-Matrizen sind, 0 eine Null-Matrix und D eine beliebige Matrix des "richtigen" Formats sind.

23. Seien A, B $n \times n$-Matrizen, I die $n \times n$-Einheitsmatrix, 0 die $n \times n - 0$-Matrix und P die $2n \times 2n$-Matrix $P = \begin{pmatrix} I & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Zeigen Sie, dass $\det P = \det A \cdot \det B$.
    (b) Zeigen Sie, dass P durch geeignete elementare Zeilenumformungen in die Matrix $\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ übergeführt werden kann.
    (c) Folgeren Sie daraus, dass $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ gilt.

24. Zeigen Sie:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le k < i \le n} (x_i - x_k).$$
(Auf der rechten Seite steht also das Produkt aller Ausdrücke $(x_i - x_k)$ für alle $i > k$. Anleitung: Induktion nach n; multiplizieren Sie jede Spalte mit x_1 und subtrahieren Sie sie von der rechts benachbarten; beginnen Sie mit der vorletzten Spalte von rechts.)

25. Für $x \in \mathbb{R}$ bestimmen Sie die Adjunkte $\operatorname{adj}(A)$ der folgenden Matrizen A:

$$\begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{pmatrix};$$

bestimmen Sie $A \cdot \mathrm{adj}(A)$ und die inversen Matrizen, sofern dies möglich ist.

26. Zeigen Sie: hat die $n \times n$-Matrix A nur ganzzahlige Eintragungen und gilt $\det A = \pm 1$, dann hat A^{-1} ebenfalls nur ganzzahlige Eintragungen.

27. Zeigen Sie, dass die Adjunkte einer symmetrischen Matrix symmetrisch ist und die Adjunkte einer oberen Dreiecksmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist. Folgern Sie, dass die inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist.

28. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathcal{P}_n$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $L_1 : V \to V$ definiert durch $(L_1 p)(x) = p(x+1)$. Berechnen Sie $\det L_1$.

29. Dasselbe für die Abbildung $\mathrm{id} - D : V \to V$ (D die Differentiationsabbildung).

30. Für fix gewähltes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ sei $f_A : V \to V$ definiert durch $f_A(X) = AX$. Zeigen Sie: $\det f_A = (\det A)^2$. Berechnen Sie $\det g_A$ für die Abbildung $g_A(X) = XA - AX$.

31. Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K der Form
$$A = \begin{pmatrix} a & b^T \\ c & D \end{pmatrix},$$
wobei $0 \neq a \in K$, $b, c \in K^{n-1}$ und D eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix. Dann gilt $\det A = a \cdot \det(D - \frac{1}{a} c b^T)$. (Die Matrix $D - \frac{1}{a} c b^T$ ist eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix.) Hinweis: wenden Sie auf die Matrix A geeignete elementare Zeilenumformungen an, die die Eintragungen in der ersten Spalte unter a in 0en transformieren.

32. Berechnen Sie $\det A$ nach der Methode des vorigen Beispiels für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

33. Seien $a < b$ reelle Zahlen; man zeige, dass auf $\mathcal{P}$ (Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) durch $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t) q(t) dt$ ein inneres Produkt definiert ist. (Bitte auch begründen, warum $\langle p, p \rangle > 0$ für $p \neq 0$.)

34. Zeigen Sie, dass auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ für jede gegebene Basis B ein inneres Produkt definiert werden kann, für welches B eine ON-Basis ist.

35. Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ sei $\mathrm{Sp} A$ (die *Spur* von A) definiert durch $\mathrm{Sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (i.e. die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonale). Zeigen Sie, dass auf $V = M_{nn}(\mathbb{R})$ durch $\langle A, B \rangle = \mathrm{Sp}(A^T B)$ ein inneres Produkt definiert ist.

36. Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren x, y in einem Euklidischen Raum die Vektoren $x+y$ und $x-y$ genau dann zueinander orthogonal sind, wenn $\|x\| = \|y\|$.

37. Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren x, y eines Euklidischen Raumes $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ genau dann gilt, wenn $y = 0$ oder $x = \lambda y$ für ein $\lambda \geq 0$.

38. Zeigen Sie, dass in einem Euklidischen Raum E gilt:
$$\forall x, y \in E : \langle x, x \rangle = \langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle \Rightarrow x = y.$$

39. Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^k$ (mit Standardskalarprodukt) an:
    (a) $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,1,1)$

(b) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (-1, -1, 1)$
(c) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0)$, $a_4 = (1, 0, 0, 0)$

40. Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf 1, x, x^2 bezüglich des inneren Produkts $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ an und stelle Sie $p(x) = x^2$ in den so erhaltenen Orthonormalbasen dar.

41. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $M^\perp$ von $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ bzw. $M = \{(a + b, a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (im $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^4$).

42. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement zum Raum aller Diagonalmatrizen und dessen Dimension im Raum $E = M_{nn}(\mathbb{R})$ bzgl. des inneren Produkts von Bsp. 32.

43. Seien V ein n-dimensionaler euklidischer Raum, $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V; bestimmen Sie die Matrix $(a_{ik}) = [\phi]_{BB}$.

44. Seien $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $Y := (y_1, \dots, y_{n-1})^T$ (das ist also eine $(n-1) \times n$-Matrix) und für $1 \leq i \leq n$ sei Y_i die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man aus Y erhält, wenn man die i-te Spalte streicht. Sei

$$y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_{n-1} := x \in \mathbb{R}^n$$

der Vektor mit den Eintragungen $x_i = (-1)^{i+1}\det Y_i$. Man zeige:

(a) $x \neq o$ genau dann, wenn die Vektoren $y_1, \dots, y_{n-1}$ linear unabhängig sind
(b) wenn die $y_1, \dots, y_{n-1}$ linear unabhängig sind, so gilt $[x] = [y_1, \dots, y_{n-1}]^\perp$.

45. Zeigen Sie, dass die Determinante jeder orthogonalen Abbildung entweder 1 oder -1 ist.

46. Sei E ein endlich dimensionaler euklidischer Raum, U ein Teilraum und σ_U die Spiegelung an U. Bestimmen Sie $\det\sigma_U$.

47. Sei $a \in E$ mit $\|a\| = 1$; zeigen Sie, dass $\sigma_{[a]^\perp}(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$ für alle $x \in E$ gilt.

48. Konkret sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und $U = [(1, 0, 1)]^\perp$; berechnen Sie die Matrix von σ_U bezüglich der Standardbasis für diesen Spezialfall.

49. Sei E ein endlich dimensionaler euklidischer Raum, U ein Teilraum und σ_U die Spiegelung an U. Bestimmen Sie $\det\sigma_U$.

50. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasis) der Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an der Ebene durch $(0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0)$.

51. Seien $\phi, \psi : E \to E$ selbstadjungiert, E ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie, dass $\phi \circ \psi$ genau dann selbstadungiert ist, wenn $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

52. Sei V ein euklidischer Raum und $T : V \to V$ eine beliebige Isometrie, d.h. eine beliebige (nicht notwendigerweise lineare) Abbildung mit $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$. Zeigen sie: wenn $T(0) = 0$, dann ist T linear. (Anleitung: zeigen Sie zuerst, daß $\|T(u)\| = \|u\|$ für alle $u \in V$; dann $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ mittels $\|T(v) - T(w)\|^2 = \|v - w\|^2$; verwenden Sie schließlich Bsp. 32 einmal mit $x = T(v) + T(w), y = T(v + w)$ und einmal mit $x = T(\alpha v), y = \alpha T(v)$.)

53. Folgern Sie aus dem vorigen Beispiel, dass jede Isometrie auf einem Euklidischen Raum die Komposition einer Translation und einer orthogonalen linearen Abbildung ist.

54. Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz-Ungleichung für unitäre Räume.

55. Beweisen Sie die 'Parallelogrammidentität' für unitäre Räume:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

56. Im unitären Raum $U = \mathbb{C}^2$ (Standardskalarprodukt) bestimme man $\|x\|$, $\|y\|$ und $\langle x, y\rangle$ für

$$x = (1 + i, 2 - i), y = (2i, 3 + 4i) \text{ und } x = (1 + i, 1 - i), y = (-1 + i, 1 + i).$$

57. Seien U und V endlich dimensionale unitäre Räume. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $\varphi\colon U \to V$ eine adjungierte Abbildung φ^* besitzt.

58. Seien U und V unitäre Räume, $\varphi : U \to V$ linear. Zeigen Sie: sind B und C Orthonormalbasen von U und V, dann gilt $[\varphi^*]_{BC} = \overline{[\varphi]_{CB}^T}$.

59. Zeigen Sie, daß für alle Elemente x, y eines unitären Raumes gilt: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$.

60. Bestimmen Sie die Matrix der Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(u, v) = -2x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + 4x_2y_1 + 3x_2y_3 - 5x_3y_1 + x_3y_2$$

(wobei $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ und $v^T = (y_1, y_2, y_3)$) bezüglich
   a) der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$
   b) der Basis $((-1, 5, 3)^T, (0, 1, 1)^T, (0, 2, 1)^T)$.

61. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Bilinearformen sind (wobei $u^T = (x_1, x_2), v^T = (y_1, y_2)$):
   (a) $f(u, v) = 1 + 3x_1 - 2y_2$,
   (b) $f(u, v) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$,
   (c) $f(u, v) = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$,
   (d) $f(u, v) = x_1y_1 - x_2y_2$.

62. Zeigen Sie, daß folgende Abbildungen Bilinearformen sind. (Wie in Bsp 32 ist für eine beliebige $n \times n$-Matrix $B = (b_{ij})$ dabei $\mathrm{Sp}B := \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ die Summe der Diagonalelemente von B.)
   a) $V = M_{n,n}(K)$ und für eine fixe Matrix $A \in V$ sei $f_A : V \times V \to K$ definiert durch $f_A(X, Y) = \mathrm{Sp}(XAY)$.
   b) V sei ein beliebiger Vektorraum, $f_1, f_2 : V \to K$ seien lineare Abbildungen $V \to K$ und $f(u, v) = f_1(u)f_2(v)$.

63. Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete Basis von V; sei f die Bilinearform mit

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $C := (b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_2)$ ebenfalls eine Basis ist und bestimmen Sie $[f]_C$.

64. Sei f die symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$, bezüglich der $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt.

65. Finden Sie die definierende symmetrische Bilinearform f für die folgende quadratische Form q auf $\mathbb{R}^2$ und gib die Matrizen von f bezüglich der Basen $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ und $C = \{(1, 2), (2, 3)\}$ an ($v = (x_1, x_2)$):
   a) $q(v) = ax_1^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ fest,
   b) $q(v) = bx_1x_2$ mit $b \in \mathbb{R}$ fest,
   c) $q(v) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$.

66. Sei $V = \mathbb{R}^4$; finden Sie Basen, bezüglich der die folgenden quadratischen Formen als Summe von Quadraten dargestellt sind, und bestimmen Sie jeweils Rang und Positivitätsindex:
   a) $q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$;
   b) $q(v) = -x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4$;
   c) $q(v) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

67. Welche der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^3$ sind positiv-, negativ-, in- bzw semidefinit?

a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$
b) $q(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$
c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2$
d) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$
e) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 5x_3^2$.

68. Auf $\mathbb{R}^2$ sei die quadratische Form $q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ gegeben. Zeige mittels Ergänzung auf Quadrate, daß q genau dann positiv definit ist, wenn $a_{11} > 0$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

69. Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$; man zeige, dass die quadratische Form $q(x) = x^T Ax$ genau dann positiv definit ist, wenn es eine reguläre, reelle $n \times n$-Matrix B gibt, sodass $A = B^T B$ gilt.

70. Man zeige für $n \times n$-Matrizen A, B: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$. Man schließe daraus, dass für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V ein endlichdimensionaler Vektorraum) die Spur $\mathrm{Sp}(\varphi)$ von φ sinnvoll definiert werden kann.

71. Sei $V = \mathbb{C}^4$ und die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ gegeben durch $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4, 3x_1 + 2x_4, -x_1 - x_3)$. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von ϕ.

72. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen (über $\mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

73. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Drehung A und einer Spiegelung B der (reellen) Ebene (für jedes mögliche α):

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

74. Zeige: sind A und B $n \times n$-Matrizen, dann haben AB und BA die selben Eigenwerte.

75. Man zeige, dass für das charakteristische Polynom $p = p_A(X)$ einer invertierbaren $n \times n$-Matrix A und das charakteristische Polynom $q = p_{A^{-1}}(X)$ von A^{-1} die Beziehung $q(X) = (-X)^n (\det A)^{-1} p(X^{-1})$ gilt.

76. Zeige: eine lineare Abbildung ϕ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von ϕ ist. Wenn c ein Eigenwert von ϕ ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von ϕ^{-1}. Außerdem haben ϕ und ϕ^{-1} dieselben Eigenvektoren.

77. Sei $A \in M_{nn}(K)$; man zeige: ist c Eigenwert von A und p ein beliebiges Polynom, dann ist $p(c)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

78. Sei $A \in M_{nn}(K)$ (K ein beliebiger Körper) und φ die Linksmultiplikation auf $M_{nn}(K)$ mit A, d.h. $\varphi : M_{nn}(K) \to M_{nn}(K)$ ist definiert durch $\varphi(M) = AM$ für jedes $M \in M_{nn}(K)$. Man bestimme das charakteristische Polynom $p_\varphi(X)$ und zeige, dass $p_\varphi(X) = (p_A(X))^n$. Hinweis: sei E_{ij} die $n \times n$-Matrix mit 1 in der (i, j)-Eintragung und 0en sonst. Verwende als geordnete Basis von $M_{nn}(K)$ die Matrizen (in dieser Reihenfolge)

$$E_{11}, E_{21}, \ldots E_{n1}, E_{12}, \ldots, E_{n2}, E_{13}, \ldots, E_{1n}, E_{2n} \ldots, E_{nn}.$$

79. Man zeige direkt, dass das charakteristische Polynom $p_A(X)$ einer reellen, symmetrischen 2×2-Matrix in Linearfaktoren zerfällt und dass jede solche Matrix orthogonal diagonalisierbar ist.

80. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ Skalare; man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $p_A(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0)$ besitzt. (Insbesondere ist jedes Polynom von Grad n mit führendem Koeffizienten $(-1)^n$ charakteristisches Polynom einer geeigneten Matrix.)

81. Man zeige, dass zu jeder orthogonalen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine ON-Basis B existiert, sodass für einen passenden Winkel α

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ oder } [f]_{BB} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

Stelle fest, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ bzw über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind.

82.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

83.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -i & 1 \\ i & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

84. Zeige, daß Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$ nicht diagonalisierbar sind.

85. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit $A^2 = I$. Ist A diagonalisierbar? (Hinweis: betrachte die Räume $V = \{x + Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ und $W = \{x - Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ und zeige, daß $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.)

86. Welche der folgenden Matrizen sind normal?
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

87. Bestimme für die folgenden Matrizen die Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Bestimme die entsprechende orthogonale (bzw. unitäre) Transformation T, sodaß $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

88. Man trigonalisiere die folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

89. Für 2×2-Matrizen verifizieren man den Satz von Cayley–Hamilton durch direktes Ausrechnen.

90. Welche Kurve zweiter Ordnung wird durch die folgende Gleichung dargestellt? Gib die Kurve in Hauptlage an und bestimme die entsprechenden Transformationen.
   (a) $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 40x_1 - 95x_2 - 25 = 0$
   (b) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 22x_1 - 14x_2 + 17 = 0$
   (c) $4x_1x_2 - 3x_2^2 + \frac{32}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{44}{\sqrt{5}}x_2 - 28 = 0$

(d) $x_1x_2 + x_1 - 5x_2 - 3 = 0.$

91. Wir sind im $\mathbb{R}^3$. Sei g die Gerade mit Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h die Gerade mit Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man bestimme die Menge aller Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, die gleichen Abstand von g und h haben. Das ergibt eine Fläche. Was sind die Höhenschichtlinien dieser Fläche (das sind die Schnitte mit den Ebenen konstanter Höhe $z = c$)?

92. Wir sind im $\mathbb{R}^3$. Man bestimme die Menge aller Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, die gleichen Abstand vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der x-y-Ebene haben. Das ergibt eine Fläche. Was sind die Höhenschichtlinien dieser Fläche?