Freiwillige Übungen zur Linearen Algebra und Geometrie 2

Winter-Semester 2021, K. Auinger

1. Bestimmen Sie Basen der Haupträume der folgenden Matrix und finden Sie eine entsprechende Darstellung der zugehörigen Abbildung als Blockdiagonalmatrix.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die JNF der Matrix von Beispiel 1. und eine entsprechende Basis von $\mathbb{Q}_8$.

3. Für $n \geq 2$ seien die Matrizen $A_n \in M_{nn}(\mathbb{Q})$ und $B_n \in M_{nn}(\mathbb{Q})$ definiert durch:
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & n \end{pmatrix} \text{ und } B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
In A_n stehen auf der Diagonale also $1, 2, \dots, n$ und auf der ersten Nebendiagonale $1, \dots, 1$; in B_n stehen auf der Diagonale $1, \dots, 1$ und auf der ersten Nebendiagonale $1, \dots, n-1$, alle anderen Eintragungen in beiden Matrizen sind $= 0$. Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von A_n und von B_n und Basen des $\mathbb{Q}^n$ bezüglich der diese Matrizen JNF haben.

4. Für $n \geq 2$ sei $L_n = (\ell_{ij})$ die $n \times n$-Matrix
$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
Dh es gilt:
$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } i + j = n + 1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$
Zeigen Sie: $L_n^{-1} = L_n$.

5. Bestimmen Sie $L_n A L_n$ für beliebiges $A \in M_{nn}(K)$; bestimmen Sie insbesondere $L_n J L_n$ für die Jordan-Matrizen $J = J_n(0)$ und $J = J_n(\lambda)$.

6. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass für jede Matrix J in Jordan'scher Normalform J und J^T ähnlich sind. Folgern Sie, dass für jede Matrix $A \in M_{nn}(K)$ mit zerfallendem chrakteristischen Polynom $\varphi_A(X)$ die beiden Matrizen A und A^T ähnlich über K sind. (Zur Erinnerung: zwei Matrizen $A, B \in M_{nn}(K)$ heißen *ähnlich über* K, falls es eine invertierbare Matrix $S \in M_{nn}(K)$ gibt, für die $A = S^{-1}BS$ gilt.) Bemerkung: die Behauptung gilt sogar ohne die Voraussetzung, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt; um dies zu zeigen, braucht man aber stärkere Hilfsmittel.

7. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \colon V \to V$ nilpotent mit Nilpotenzindex k. Zeigen Sie, wie die Folge $(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ (aus dem Satz über die Jordan'sche Normalform)

aus der Folge $\dim\ker\varphi, \dim\ker\varphi^2, \ldots, \dim\ker\varphi^{k-1}, n$ berechnet werden kann (ohne die Folge $n, \mathrm{rg}\varphi, \mathrm{rg}\varphi^2, \ldots, \mathrm{rg}\varphi^{k-1}$ zu verwenden).

8. Im „Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geomtrie von G. Fischer“ finden Sie in Abschnitt 4.2.6 einen alternativen Beweis für die Existenz der Jordan'schen Normalform eines nilpotenten Endomorphismus. Machen Sie sich die wesentlichen Argumente des Beweises klar!
9. Formulieren Sie einen Algorithums für die Konstruktion einer Jordan-Basis für einen nilpotenten Endomorphismus, der auf dem o.g. Beweis im Buch von G. Fischer basiert.

Solange nichts anderes angemerkt ist, sind nun alle Vektorräume K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Alle Isomorphien $\cong$ sind als kanonische Isomorphien zu verstehen.

10. Finden Sie ein Beispiel von (endlich dimensionalen) Vektorräumen U, V, W und eine bilineare Abbildung $\varphi\colon U \times V \to W$, sodass $\varphi(U \times V) = \{\varphi(u, v) \mid u \in U, v \in V\}$ kein linearer Teilraum von W ist (verwenden Sie dazu nicht das Konzept des Tensorprodukts).
11. Für Vektorräume U, V, W seien $B(U, V; W)$ der Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$ und $L(U, V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $U \to V$ (beide bezüglich der punktweisen Operationen). Zeigen Sie
$$B(U, V; W) \cong L(U, L(V, W)) \cong L(V, L(U, W)).$$
12. Seien U, V Vektorräume und $\beta\colon L(U, V) \times U \to V$ definiert durch $(\varphi, u) \mapsto \varphi(u)$. Zeigen Sie, dass β bilinear und surjektiv ist.
13. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $K^n \otimes V \cong V^n$ (n-faches Cartesische Potenz von V). (Man beachte, dass jedes Cartesische Produkt $U \times V$ als direkte Summe $U' \oplus V'$ mit $U \cong U'$ und $V \cong V'$ angesehen werden kann.)
14. Seien U und V Vektorräume mit Teilräumen $U_1 \subseteq U$ und $V_1 \subseteq V$. Zeigen Sie
$$U/U_1 \otimes V/V_1 \cong U \otimes V / (U_1 \otimes V + U \otimes V_1).$$

In den folgenden drei Beispielen ist Gleichheit als Teilmengen von $U \otimes V$ zu zeigen, eine Inklusion ist dabei jeweils trivial.

15. Seien $U_1, U_2 \subseteq U$ Teilräume von U und V ein weiterer Vektorraum. Zeigen Sie
$$U_1 \otimes V \cap U_2 \otimes V = (U_1 \cap U_2) \otimes V.$$
16. Seien $U_1 \subseteq U$ und $V_1 \subseteq V$ Teilräume von Vektorräumen U und V. Zeigen Sie
$$(U_1 \otimes V) \cap (U \otimes V_1) = U_1 \otimes V_1$$
17. Seien $U_1, U_2 \subseteq U$ und $V_1, V_2 \subseteq V$ Teilräume von Vektorräumen U und V. Zeigen Sie
$$(U_1 \otimes V_1) \cap (U_2 \otimes V_2) = (U_1 \cap U_2) \otimes (V_1 \cap V_2).$$
18. Für einen reinen n-fachen Tensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ zeige man:
   (a) $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = o$ genau dann wenn $v_i = o$ für zumindest ein i;
   (b) für $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \neq o$ gilt: $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$ genau dann, wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$ und $v_i = \lambda_i w_i$ für alle i.

Für lineare Abbildungen $\varphi\colon V_1 \to V_2$ und $\psi\colon W_1 \to W_2$ sei $\varphi \otimes \psi\colon V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w)$ für alle $v \in V_1$ und $w \in W_1$ ($\varphi \otimes \psi$ ist also die Abbildung, die ursprünglich mit $\varphi \boxtimes \psi$ bezeichnet wurde).

19. Zeigen Sie: $\mathrm{Im}(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{Im}\,\varphi \otimes \mathrm{Im}\,\psi$ und $\ker(\varphi \otimes \psi) = \ker\varphi \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker\psi$. Formulieren Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Injektivität und Surjektivität von $\varphi \otimes \psi$.

Im folgenden soll anhand eines Beispiels gezeigt werden, dass die kanonische Einbettung
$$L(V_1, V_2) \otimes L(W_1, W_2) \hookrightarrow L(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2)$$

für unendlich dimensionale Räume im Allgemeinen nicht surjektiv ist; nicht einmal, wenn die beiden Räume $L(V_1, V_2) \otimes L(W_1, W_2)$ und $L(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2)$ (nicht-kanonisch) isomorph als K-Vektorräume sind. Das Gegenbeispiel ist $V = V_1 = W_1$, ein Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis $\{e_1, e_2, \dots\}$ und $V_2 = W_2 = K$. Wegen $K \otimes K \cong K$ ist $L(V \otimes V, K \otimes K) \cong (V \otimes V)^*$ und klarerweise gilt $L(V, K) = V^*$. MaW, es soll gezeigt werden, dass die kanonische Einbettung $V^* \otimes V^* \hookrightarrow (V \otimes V)^*$ nicht surjektiv ist. Es gilt aber zB für $K = \mathbb{Q}$: $\dim V = \dim(V \otimes V) = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\dim(V^* \otimes V^*) = \mathfrak{c}^2 = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = \dim V^* = \dim(V \otimes V)^*$, und daher $V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$ als $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

Generell sei, für eine Menge X, K^X der K-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon X \to K$ und K_{f}^X der K-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon X \to K$ mit endlichem Träger (d.h. $f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in X$); dieser Vektorraum ist isomorph zu $F_K(X)$. Wir realisieren V konkret als $V := K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}}$, den Vektorraum aller K-Folgen mit nur endlich vielen Folgengliedern $\neq 0$. Eine Basis dieses Vektorraums ist dann $\{e_1, e_2, \dots\}$ mit $e_i(j) = \delta_{ij}$ für alle i und j. Zeigen Sie:

20. $(K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}})^* \cong K^{\mathbb{N}}, \quad K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}} \otimes K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}} \cong K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \quad (K_{\mathrm{f}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}})^* \cong K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

21. Die kanonische Einbettung $K^{\mathbb{N}} \otimes K^{\mathbb{N}} \hookrightarrow K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ erfüllt $x \otimes y \mapsto (x_i y_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$, wobei $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Diese Abbildung ist nicht surjektiv: die $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-Matrix $D = (\delta_{ij})$ kann nicht als endliche Summe von „reinen Tensoren“ $\sum_{l=1}^r x_l \otimes y_l = \sum_{l=1}^r (x_{li} y_{lj}) =: A$ dargestellt werden. Hinweis: jede endliche Untermatrix von A hat höchstens Rang r, wohingegen D endliche Untermatrizen mit beliebig großem Rang hat.

22. Seien $\varphi\colon U \to U$ und $\psi\colon V \to V$ Endomorphismen von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen U und V. Zeigen Sie: $\mathrm{sp}(\varphi \otimes \psi) = (\mathrm{sp}\varphi) \cdot (\mathrm{sp}\psi)$ (sp die Spur des jeweiligen Endomorphismus).

23. Sei U ein Teilraum des Vektorraums V und U_p der Teilraum $\bigwedge^p V$, der von allen Elementen $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$, wobei für mindestens ein i gilt: $v_i \in U$, aufgespannt wird. Zeigen Sie:
$$\bigwedge^p V/U \cong (\bigwedge^p V)/U_p.$$

Seien A und B K-Vektorräume. Ein K-Vektorraum $S = S(A, B)$ zusammen mit linearen Abbildungen $\alpha\colon A \to S$ und $\beta\colon B \to S$ heißt *direkte Summe* der Vektorräume A und B, wenn folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für alle K-Vektorräume W und alle linearen Abbildungen $\varphi_A\colon A \to W$ und $\varphi_B\colon B \to W$ gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon S \to W$, sodass $\varphi_A = \varphi \circ \alpha$ und $\varphi_B = \varphi \circ \beta$.

24. Stellen Sie die Situation in einem Diagramm dar.

25. Zeigen Sie, dass $S = S(A, B)$ bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

26. Zeigen Sie, dass $S = \alpha(A) \oplus \beta(B)$ (wobei $\oplus$ im herkömmlichen Sinn zu verstehen ist).

27. Zeigen Sie, dass $S = A \times B$ (Cartesisches Produkt der beiden Vektorräume mit komponentenweise definierten Operationen), zusammen mit den Abbildungen $A \to A \times B$, $a \mapsto (a, o)$ und $B \to A \times B$, $b \mapsto (o, b)$ eine (= die) direkte Summe von A und B ist.

28. Verallgemeinern Sie die Definition auf eine beliebige (nicht-leere) Menge $\{A_i \mid i \in I\}$ von K-Vektorräumen und diskutieren Sie die analogen Fragestellungen wie im Fall $\{A, B\}$.

    Die direkte Summe zweier Vektorräume A und B wird üblicherweise mit $A \oplus B$ bezeichnet (warum kommt man hier nicht in einen Konflikt mit der bereits definierten direkten Summe zweier Teilräume eines Vektorraums V?), die direkte Summe einer Menge $\{A_i \mid i \in I\}$ mit $\bigoplus_{i\in I} A_i$. Im Fall $I = \mathbb{N}$ schreibt man oft auch $\bigoplus_{i=1}^\infty A_i$.

29. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n ein K-Vektorraum. Sei $\prod_{n=1}^\infty A_n$ der Vektorraum aller Folgen $a = (a_1, a_2, \dots)$ mit $a_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit komponentenweise definierten Operationen und S der Teilraum aller Folgen mit höchstens endlich vielen Gliedern $\neq o$. Zeigen Sie: mit den linearen Abbildungen $A_n \to S$, $a \mapsto (o, \dots, o, \underset{n}{a}, o, \dots)$ gilt $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \cong S$.