Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt SS 2021

Christoph Baxa

1) Drei Lehramtsstudenten machen gemeinsam Urlaub im Süden. Da sie wenig Geld haben, suchen sie eine billige Unterkunft. Tatsächlich finden sie ein günstiges Hotel, in dem sie gemeinsam um 30 Euro übernachten können. Jeder der drei bezahlt dem Rezeptionisten 10 Euro und sie gehen auf ihr Zimmer. Wenig später erkundigt sich der Hotelbesitzer beim Rezeptionisten nach der Buchungslage. Als er von den drei Studenten hört, macht er den Rezeptionisten darauf aufmerksam, dass das Hotel das Zimmer für Studenten sogar um nur 25 Euro anbietet. Also macht sich der Rezeptionist mit 5 Euro auf den Weg zu den Studenten. Unterwegs überlegt er sich, dass man die 5 Euro ja gar nicht vernünftig auf drei Personen aufteilen kann. Also gibt er jedem der drei nur einen Euro zurück und behält zwei Euro als Trinkgeld. Nun hat jeder der Studenten 9 Euro für das Zimmer bezahlt und der Rezeptionist hat 2 Euro. Das macht in Summe 29 Euro. Wo ist der 30. Euro geblieben?

2) Welches der drei Symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ oder $\Longleftrightarrow$ kann man in den folgenden Aussagen an der Stelle der drei Punkte $\ldots$ einsetzen, sodass eine wahre Aussage entsteht?

a) Heute ist Dienstag $\ldots$ Morgen ist Mittwoch
b) Es regnet $\ldots$ Die Straße ist nass
c) Matura bestanden $\ldots$ Alle Noten im Zeugnis sind positiv
d) Matura bestanden $\ldots$ Mathematiknote ist positiv
e) Die ganze Zahl a ist durch 3 teilbar $\ldots$ Die Ziffernsumme von a ist durch 3 teilbar
f) Die ganze Zahl a ist durch 9 teilbar $\ldots$ Die Ziffernsumme von a ist durch 3 teilbar
g) $a = 3 \ldots\ a^2 = 9$

3) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $1 = 2$ gilt. Dazu wählen wir zwei beliebige Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a = b$.

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 + a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 + ab - 2ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2 \cdot (a^2 - ab) &= 1 \cdot (a^2 - ab) \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

4) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $4 = 5$ gilt.

$$\begin{aligned}
-20 &= -20\\
16 - 36 &= 25 - 45\\
16 - 36 + \tfrac{81}{4} &= 25 - 45 + \tfrac{81}{4}\\
4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2\\
(4 - \tfrac{9}{2})^2 &= (5 - \tfrac{9}{2})^2\\
4 - \tfrac{9}{2} &= 5 - \tfrac{9}{2}\\
4 &= 5
\end{aligned}$$

5) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Beweis. Wir zeigen $1 = 2 = \cdots = n$ durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung stimmt für $n = 1$, denn $1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gilt $1 = 2 = \cdots = n$.
Induktionsschritt: Aus $n - 1 = n$ folgt $n = n + 1$ und daher $1 = 2 = \cdots = n = n + 1$.

6) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Je n beliebige Punkte in einer Ebene liegen stets auf einer Gerade.
Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 1$ und $n = 2$ offensichtlich korrekt.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für n Punkte schon gezeigt.
Induktionsschritt: Gegeben seien die $n + 1$ Punkte $P_1, \dots, P_{n+1}$ in der Ebene. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, \dots, P_n$ auf einer Gerade g. Ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_2, \dots, P_{n+1}$ auf einer Gerade h. Da die beiden Punkte P_2 und P_n auf beiden Geraden g und h liegen, muss $g = h$ gelten und daher liegen $P_1, \dots, P_{n+1}$ alle auf einer Gerade.

7) Mit $A(n)$ werde die Aussage $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $A(n + 1)$ aus $A(n)$ folgt. Ist die Aussage $A(n)$ wahr?

8) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Die größte natürliche Zahl N ist 1.
Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen $N \neq 1$. Da $0 < 1$ ist $N \neq 0$ und daher $N > 1$. Daraus folgt $N^2 > N$, was der Definition von N widerspricht.

Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen für einen Körper K nur mit Hilfe der Körperaxiome bzw. den in der Vorlesung daraus abgeleiteten Folgerungen. Beachten Sie, dass Ihre Argumentation in einem beliebigen Körper gelten soll und imitieren Sie die Beweise aus der Vorlesung.

9) Das Einselement $1(\in K)$ ist eindeutig bestimmt.

10) Zu gegebenem $a \in K$, $a \neq 0$ ist das multiplikative Inverse $\frac{1}{a}$ eindeutig bestimmt.

11) Zu $a, b \in K$, $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in K$, sodass $a \cdot x = b$.

12) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

13) Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

14) Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

15) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

16) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

17) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, c, d \neq 0$ gilt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

18) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

19) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

20) Beweisen Sie für $a, b \in K$ (wobei K ein angeordneter Körper sein soll):

a) Wenn $a, b > 0$ dann $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.
b) Wenn $a, b < 0$ dann $a + b < 0$ und $a \cdot b > 0$.

21) Beweisen Sie für $a, b \in K$ (wobei K ein angeordneter Körper sein soll):

Wenn $0 < a < b$ dann $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

22) Beweisen Sie für $a, b, c \in K$ (wobei K ein angeordneter Körper sein soll):

a) Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$.
b) Wenn $a \leq b$ und $c > 0$ dann $a \cdot c \leq b \cdot c$.
c) Wenn $a \leq b$ und $c < 0$ dann $a \cdot c \geq b \cdot c$.
d) Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ dann $a = b$.

23) Beweisen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 3$ gibt (d.h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).

24) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ gilt, dass $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

25) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$ gilt.

26) Beweisen Sie: Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

27) Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Gleichungen:

a) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |b - a|}{2}$ b) $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |b - a|}{2}$

28) Sind die folgenden Mengen nach unten bzw. oben beschränkt? Wenn ja, was ist ihr Infimum bzw. Supremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum bzw. Maximum?

a) $(-1, 1)$ b) $[-3, 2)$ c) $(-3, 1) \cup [2, +\infty)$
d) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ e) $\left\{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

29) a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n = [n, +\infty)$. Beweisen Sie $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \geq 0$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \varnothing$.
b) Ebenso für $I_n = (0, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Widersprechen diese Ergebnisse dem Intervallschachtelungsprinzip?

30) Es seien $A = [3, 11]$, $B = \{-1, 2, 18\}$, $C = [0, 1) \cup \{2\}$ und $D = (-\infty, -100]$.
Berechnen Sie $2A$, $-2B$, $3C$, $-3D$, $A + B$, $A + C$, $A + D$, $B + C$, $B + D$ und $C + C$.

31) Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ und $M, N \neq \varnothing$. Beweisen Sie: Wenn M und N nach oben beschränkt sind, ist auch $M \cup N$ nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}.$$

32) Es sei $a < 0$ und $p \in \mathbb{N}$ ungerade. Beweisen Sie: Es gibt genau ein $x < 0$ mit der Eigenschaft $x^p = a$. Verwenden Sie keine Dedekindschen Schnitte, sondern führen Sie die Behauptung auf Satz 12 aus der Vorlesung zurück.

33) Beweisen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leq k < n$

Geben Sie für beide Aussagen einen Beweis mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten und einen mittels ihrer kombinatorischen Interpretation.

34) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$,

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

Können Sie eine kombinatorische Interpretation dieser Identitäten geben?

35) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

36) Es sei $a > 0$ und $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $p < n$. Beweisen Sie

$$\sqrt[n]{a^p} \leq 1 + \frac{p}{n}(a-1).$$

37) Beweisen Sie die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Ist $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

38) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie direkt aus der Grenzwertdefinition

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+a} = 0.$$

(Die Folgenglieder sind für $n > |a|$ sicher definiert.)

39) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ für

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{n^2 + n + 2}{4n^3 + 1}, \qquad \text{b)} \quad a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}.$$

40) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ für

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{4n^4 - n + 2}{2n^4 + 2n^2 + n}, \qquad \text{b)} \quad a_n = \frac{n^3 + n}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n + 1}.$$

41) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$, $a_p \neq 0$ und $b_q \neq 0$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} a_p/b_q & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p < q. \end{cases}$$

Bemerkung. Man kann relativ leicht zeigen, dass die Folgenglieder für genügend großes n sicher definiert sind. Sie können diese Tatsache ohne Beweis verwenden.

42) Berechnen Sie:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2n^2-1} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} q^n \quad \text{für } |q| < 1$$

43) Berechnen Sie:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

44) Berechnen Sie:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \right) \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Hinweis. Verwenden Sie $\frac{1}{m\cdot(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ in Teil a).

45) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Berechen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n^p}$. Was können Sie aus den Ergebnissen über den Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ folgern, wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für fast alle n die Relation $n^{-p} < a_n < n^p$ erfüllt?

46) Beweisen Sie:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right) = \frac{1}{3}$$

47) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{\left(1-\tfrac{a}{n}\right)\left(1-\tfrac{b}{n}\right)}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Ab welchem Index sind die Folgenglieder sicher definiert?

48) Beweisen Sie: Wenn $0 \leq a \leq b \leq c$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$. Geben Sie eine analoge Aussage für p Zahlen $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p$ an (und beweisen Sie sie).

49) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion ist, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a).$$

50) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dann gelten

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}.$$

Hinweis. Ein früheres Beispiel ist sehr hilfreich.

51) Beweisen Sie: Wenn $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$ und es ein $q \in (0, 1)$ gibt, derart dass $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für fast alle n, dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

52) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ beliebig fest gewählt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

53) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

54) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei folgendermaßen iterativ definiert: $a_1 := \sqrt{2}$, $a_2 := \sqrt{a_1 + 2}$, allgemein $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2}$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie:

a) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wächst monoton,
b) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist durch 2 nach oben beschränkt,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach n für die Teile a) und b).

55) Beweisen Sie: Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so ist die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge. Gilt die Umkehrung?

56) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

eine Cauchyfolge (und daher konvergent) ist.

57) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$ (mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$ (mit $r > 0$ rational)

58) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ sei konvergent. Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$

59) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$ b) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$$

60) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2 + 3n - 7) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 - 5n) = +\infty$

61) Bestimmen Sie die Häufungspunkte und $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$:

a) $$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$ b) $$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \geq 1, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \geq 0, \\ 2 & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \geq 0. \end{cases}$$

62) Finden Sie eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, die als Häufungspunkte die drei Zahlen 163, $\frac{22}{7}$ und e besitzt.

63) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (ca_n) = c \, \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ für alle $c > 0$,

b) Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, so gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

64) Es seien $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$ b) $\operatorname{grad}(p + q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$

Dabei gelten die Konventionen $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ sowie $\max\{-\infty, n\} = n$ bzw. $\max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$ und $-\infty \leq n$ bzw. $-\infty \leq -\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

65) (Lagrangesches Interpolationspolynom) Es seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ (die nicht verschieden zu sein brauchen). Beweisen Sie, dass durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}$$

eine Polynomfunktion mit den Eigenschaften $\operatorname{grad} p \leq n$ und $p(a_k) = b_k$ (für $0 \leq k \leq n$) gegeben ist.

66) (Gaußklammer) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ (d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$). Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Ist die Funktion f gerade bzw. ungerade? Finden und beweisen Sie eine Formel, die $[-x]$ durch $[x]$ ausdrückt.

67) a) Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit $\operatorname{grad} p \geq 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p. Beweisen Sie, dass es eine Polynomfunktion q mit $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} p - 1$ und der Eigenschaft $p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ gibt. *Hinweis.* Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest.

b) Benützen Sie Teil a), um zu zeigen: Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $\operatorname{grad} p \geq 1$, so besitzt p höchstens $\operatorname{grad} p$ viele Nullstellen.

68) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die charakteristischen Funktionen der Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$:

a) $c_{A\cap B} = c_A \cdot c_B$ b) $c_{A\cup B} = c_A + c_B - c_{A\cap B}$

69) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ wird die symmetrische Differenz $A \triangle B$ definiert als

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Drücken Sie $c_{A\triangle B}$ durch c_A und c_B aus und beweisen Sie Ihre Behauptung.

70) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $-D = D$. Beweisen Sie:

a) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei gerade (bzw. ungerade) Funktionen, so sind $f \pm g : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls zwei gerade (bzw. ungerade) Funktionen.

b) Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sowohl gerade als auch ungerade, so ist $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in D$).

71) Beweisen Sie: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich auf eindeutige Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben. *Hinweis.* Verwenden Sie für die Existenz die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

72) Es sei $b > 1$. Beweisen Sie:

a) Für alle $x, y > 0$ gilt ${}_b\log \frac{x}{y} = {}_b\log x - {}_b\log y$.
b) Für alle $x > 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt ${}_b\log x^y = y \cdot {}_b\log x$.

73) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \leq 2, \\ 3x - 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Geben Sie einen detaillierten Beweis dafür, dass f im Punkt 2 stetig ist (d.h. argumentieren Sie mit $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$).

74) Berechnen Sie (soferne sie existieren) die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} \right)$$

75) Beweisen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

76) Beweisen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = 0$. *Hinweis.* In der Vorlesung wurde $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ bewiesen.

77) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)$. Beweisen Sie, dass die Funktion f im Punkt $x = 0$ stetig ist, in allen anderen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber nicht. *Hinweis.* Sie können Satz 25 bzw. eine geeignete Modifikation davon verwenden.

78) a) Beweisen Sie: Wenn die Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig ist, besitzt sie einen Fixpunkt $\xi \in [a, b]$. *Hinweis.* Betrachten Sie die Abbildung $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.
b) Geben Sie Beispiele für stetige Funktionen $f : I \to I$ ohne Fixpunkt an, wobei I ein Intervall, aber entweder nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist.

79) Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und $f(D) \subseteq E$. Beweisen Sie:

a) Wenn f und g gleichmäßig stetig sind, dann ist auch $g \circ f$ gleichmäßig stetig.
b) Wenn f und g Lipschitz-stetig sind, dann ist auch $g \circ f$ Lipschitz-stetig.

80) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Beweisen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. *Hinweis.* Sie können z.B. zeigen, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq nM^{n-1}|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b],$$

wobei $M = \max\{|a|, |b|\}$ bezeichnen soll.

81) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)$. Beweisen Sie, dass f im Punkt 0 differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(0)$.

Alle nachfolgenden Beispiele, in denen Ableitungen zu berechnen sind, sollten nur mit Bleistift und Papier gelöst werden. Computerprogramme sollten nur zur Kontrolle dienen.

82) Berechnen Sie für die beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen der Funktionen $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils auf zwei Arten: Einmal durch addieren bzw. multiplizieren und anschließendes differenzieren, einmal durch anwenden der Rechenregeln von Satz 67.

a) $f(x) = x^2 - 1, \;\; g(x) = x^2 + 1,$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 5, \;\; g(x) = 3x - 4,$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2, \;\; g(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x + 7.$

83) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ seien alle in ξ differenzierbar. Beweisen Sie: Dann ist auch $f_1 \cdots f_n : I \to \mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(\xi) = (f_1' f_2 \cdots f_n)(\xi) + (f_1 f_2' f_3 \cdots f_n)(\xi) + \cdots + (f_1 \cdots f_{n-1} f_n')(\xi).$$

84) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf zwei Arten: Einmals durch multiplizieren und anschließendes differenzieren, einmal durch anwenden des vorangegangenen Beispiels.

a) $f(x) = x^2(2x - 1)(x^2 + 1),$

b) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 1)(x^3 + 1).$

85) Beweisen Sie, ausgehend von der Gleichung $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, mittels differenzieren die folgenden Identitäten für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

86) Ermitteln Sie Definitionsbereich und Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^5}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(2x^3 - 1)^4}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^5}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}$

87) Ermitteln Sie Definitionsbereich und Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \dfrac{5x - 8}{3 - 2x}$ b) $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 7x + 3}$ c) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x - 1}{x^3 + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{3x - 7}$

88) Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgenden Funktionen (wobei gelten soll, dass $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

a) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.
b) $f(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + n^2x^n$.

89) Ermitteln Sie Definitionsbereich und Ableitung der Funktion f. Geben Sie an, wo die Funktion f differenzierbar ist.

a) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ c) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 4}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

90) Ermitteln Sie Definitionsbereich und Ableitung der Funktion f. Geben Sie an, wo die Funktion f differenzierbar ist.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-7}}{3x+6}$

91) Ermitteln Sie Definitionsbereich, Ableitung und Umkehrfunktion der Funktion f. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion zweimal, einmal durch direkte Berechnung und einmal durch anwenden von Satz 72. Geben Sie an, wo die Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar sind.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$ c) $f(x) = \sqrt{x+2}$

92) Ermitteln Sie Definitionsbereich und Ableitung der Funktion f. Geben Sie an, wo die Funktion f differenzierbar ist.

a) $f(x) = \log(\log x)$ b) $f(x) = x^x$ c) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{e^{x^2+x+1}}$

93) Es sei $0 < a \leq 1$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass die Polynomfunktion $p(x) = ax^3 - 3ax + b$ (mit $b \in \mathbb{R}$ beliebig) im Intervall $[-a, a]$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

94) Ermitteln Sie die Intervalle, auf denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wächst bzw. fällt und Stellen und Art ihrer lokalen Extrema.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = x^2 + 6x + 14$ c) $f(x) = -x^2 + 6x - 13$

95) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von den drei Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$, die Intervalle, auf denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ monoton wächst bzw. fällt und Stellen und Art ihrer lokalen Extrema. *Hinweis.* Beachten Sie, dass dabei z.B. *nicht* vorausgesetzt wird, dass $a \neq 0$ ist.

96) Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Stellen und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2.$$

97) Ermitteln Sie die Intervalle, auf denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wächst bzw. fällt und Stellen und Art ihrer lokalen Extrema.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ b) $f(x) = x^3 - 12x + 5$ c) $f(x) = -x^4 + 8x^2$

98) Welche Bedingung muss $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + bx^2 + 3x + 5$$

kein lokales Extremum besitzt?

99) Bestimmen Sie das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das dem Einheitskreis eingeschrieben werden kann.

100) Bestimmen Sie das achsenparallele Rechteck mit maximalem Umfang, das der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$) eingeschrieben werden kann.

101) Beweisen Sie die Ungleichung $\log x < x - 1$ für alle $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

102) Es seien $x, y > 0$ zwei verschiedene reelle Zahlen. Beweisen Sie:
a) Ist $0 < \alpha < 1$, so gilt $\alpha x^{\alpha-1}(x - y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha y^{\alpha-1}(x - y)$.
b) Ist $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$, so ist $\alpha x^{\alpha-1}(x - y) > x^\alpha - y^\alpha > \alpha y^{\alpha-1}(x - y)$.

103) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \log(1 + 1/x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1-} \log x \cdot \log(1 - x)$

104) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (mit $a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$):

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{(1 - x)^\alpha - (1 - \alpha x)}{x^2}$ b) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$

105) Versuchen Sie, den Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

durch (direkte) Anwendung der Regel von de l'Hospital zu finden. Falls das nicht gelingen sollte, analysieren Sie das Problem und finden Sie einen anderen Weg zu seiner Berechnung.

106) Finden Sie den Fehler in der folgenden Anwendung der Regel von de l'Hospital. Wie lautet der wahre Grenzwert?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x+2}{2} = 4$$

107) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$. Finden Sie $f^{(n)}$ (für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) mit Hilfe von Satz 90 und bestätigen Sie das Ergebnis anschließend, indem Sie es nochmals mittels Induktion beweisen.

108) Beweisen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und jedes $x > -1$ gibt es eine reelle Zahl ξ zwischen 0 und x, derart dass

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Folgern Sie daraus: Ist $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $0 \leq x \leq 1$, so ist

$$\left| \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Definition: Wir erweitern die Definition des Binomalkoeffizienten. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

109) Beweisen Sie:
a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}.$$

Was erhält man für $\alpha = 1$?
b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

110) Beweisen Sie: Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x > -1$ gibt es ein ξ zwischen 0 und x, derart dass

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}.$$

Was erhält man daraus im Fall $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $n = \alpha$?

Alle nachfolgenden Beispiele, in denen Integrale zu berechnen sind, sollten nur mit Bleistift und Papier gelöst werden. Computerprogramme sollten nur zur Kontrolle dienen.

111) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{-2}^{4} x^3 \, dx \qquad \text{b)} \int_{1}^{5} \frac{1}{x} \, dx \qquad \text{c)} \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2} \, dx$$

112) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{0}^{1} e^{5x} \, dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \left(3x + \frac{4}{x^3}\right) dx \qquad \text{c)} \int_{4}^{6} \frac{1}{x-3} \, dx$$

113) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{4}^{9} \sqrt{x} \, dx \qquad \text{b)} \int_{1}^{3} 2^x \, dx \qquad \text{c)} \int_{1}^{4} \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx$$

114) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{1}^{4} (\log x + x) \, dx \qquad \text{b)} \int_{1}^{2} \left(3^x - 5\sqrt[4]{x^3}\right) dx \qquad \text{c)} \int_{1}^{4} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

115) Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie die zu integrierende Funktion so umformen, dass die Stammfunktion einfach gefunden werden kann:

$$\text{a)} \int_{-2}^{3} x^2(2x-3) \, dx \qquad \text{b)} \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x} \, dx$$

116) Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie die zu integrierende Funktion so umformen, dass die Stammfunktion einfach gefunden werden kann:

$$\text{a)} \int_{2}^{5} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad \text{b)} \int_{1}^{4} \frac{(x^2+1)^3}{x^2} \, dx$$

117) Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie die zu integrierende Funktion so umformen, dass die Stammfunktion einfach gefunden werden kann:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+5x-12}{x+4}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^x - e^{-x}\right)^2\,dx$

118) Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_1^4 x\log x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{1+x}\,dx$

119) Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^a xe^{ax}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^6 x^3\log x\,dx$

120) Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_1^3 x^2e^x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (\log x)^2\,dx$

121) a) Beweisen die folgende Variante der partiellen Integration: Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int f(x)g''(x)\,dx = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) + \int f''(x)g(x)\,dx.$$

b) Verwende Sie Teil a) um $\int x^2e^x\,dx$ nochmals zu berechnen.

122) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution. Geben Sie dabei auch die Stammfunktion der zu integrierenden Funktion an.

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 (5x-3)^7\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 (2-3x)^{-2}\,dx$

123) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution. Geben Sie dabei auch die Stammfunktion der zu integrierenden Funktion an.

a) $\displaystyle\int_1^3 e^{2x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

124) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution. Geben Sie dabei auch die Stammfunktion der zu integrierenden Funktion an.

$$\text{a)} \int_0^4 \sqrt{1+x}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^2 x\sqrt{x^2+3}\,dx$$

125) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution. Geben Sie dabei auch die Stammfunktion der zu integrierenden Funktion an.

$$\text{a)} \int_2^3 \frac{1}{3x-5}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$$

126) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution. Geben Sie dabei auch die Stammfunktion der zu integrierenden Funktion an.

$$\text{a)} \int_{1/e}^1 \frac{(\log x)^2}{x}\,dx \qquad \text{b)} \int_2^4 xe^{-x^2}\,dx$$

127) Zeigen Sie die folgenden Formeln für passende Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$:

a) $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$,

b) $\int f'(x)\big(f(x)\big)^n\,dx = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1} + C$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und $f(x) \neq 0$ für $n < 0$,

c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ wobei $f(x) \neq 0$.

Welche Voraussetzungen muss man dabei an die Funktion f stellen? Was erhält man in Teil b) für $n = 1$? Sind Integrale dieser Gestalt in den vorangegangenen Beispielen aufgetaucht (eventuell bis auf eine Konstante)?

128) Finden Sie Formeln ähnlich zu den im vorangegangenen Beispiel angegebenen für positive Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ für die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int \sqrt{f(x)} \cdot f'(x)\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

129) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie für diese α seinen Wert:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$$

130) Berechnen Sie die folgenden beiden uneigentlichen Integrale:

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad \text{b)} \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

131) Beweisen Sie: Wenn für die zwei Funktionen $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

existieren und $c \in \mathbb{R}$ ist, dann existieren auch die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^\infty (cf)(x)\,dx$$

und es gelten:

$$\text{a)} \int\limits_a^\infty (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \qquad \text{b)} \int\limits_a^\infty (cf)(x)\,dx = c\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

132) Finden Sie zwei unbeschränkte Funktionen $f, g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, derart dass die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ und $\int_0^1 g(x)\,dx$ beide existieren, das uneigentliche Integral der Funktion $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ auf $(0, 1]$ aber nicht existiert.

133) Beweisen Sie die folgende Formel und finden Sie eine analoge Formel für $\cos x + \cos y$:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

134) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$ b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$

135) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ b) $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$

136) a) Zeigen Sie mit Hilfe des vorletzten Beispiels $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe des vorangegangenen Beispiels $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und folgern Sie daraus $\sin(\pi/6) = 1/2$.
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), dass $\cos(\pi/3) = 1/2$ und $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

137) Beweisen Sie:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Leiten Sie Formeln für $\tan(x - y)$, $\tan(2x)$ und $\cot(x + y)$ ab.

138) Beweisen Sie: a) Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.
b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$.

139) Zwei Studenten finden als Ergebnis für die Aufgabe, die Stammfunktion von

$$f(x) = \sin(2x)$$

zu finden, die beiden Lösungen

$$F_1(x) = \sin^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Da sie beide keinen Fehler finden können, schließen sie daraus, dass

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Eine hinzugekommene Studentin wird misstrauisch und meint, dass das so nicht stimmen könne. Wer von den dreien hat recht bzw. unrecht? Falls sich doch ein Fehler eingeschlichen haben sollte, wie korrigiert man ihn?

140) Finden Sie Rekursionsformeln für die folgenden Stammfunktionen (wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$):

a) $\int \cos^n x \, dx$ b) $\int x^n \cos x \, dx$