

Übungen zu “Einführung in die Analysis”

WS 2017/2018

33. Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für $n \geq 0$. Ist die Folge konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.
34. Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ ($n \geq 1$) gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.
35. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
36. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, so dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.
37. Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$(a) a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (b) a_n = \sqrt{n} + \sin \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (c) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{n^2 + k} \quad (n \geq 1).$$

38. (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.
 (b) Für $p \geq 1$, sei $a_n = \sqrt[p]{1^p + 2^p + \dots + n^p}$ ($n \geq 2$). Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Hinweis zu (a). Bezeichnen Sie $b_n := \sqrt[n]{n} - 1 \quad \forall n \geq 1$. Somit gilt $n = (1 + b_n)^n$. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz um zu zeigen, dass $(b_n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist.
39. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 (b) Sei $x > 1$. Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!}$.

40. Bestimmen Sie

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{4^n - 5^{n+1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (7^n - 7^{n+2}) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \text{ wobei } a > 0, b > 0.$$

41. Bestimmen Sie

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{2n^2 + n + 1} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

42. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist. Gilt die Aussage auch im Fall $a = 0$?
43. Geben Sie jeweils ein Beispiel für reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ und
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent gilt.
44. (a) (Grenzwertsatz von Stolz-Cesàro) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit den Eigenschaften
- (i) $0 < b_0$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und ist gleich q .

(b) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

45. (a) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

(b) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

Hinweis. Verwenden Sie Übung 44 (a).

46. (a) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine reelle Folge, so dass $a_n > 0 \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \dots \sqrt[n]{n}}$.

Hinweis zu (a). Verwenden Sie Übung 45 (b).

47. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent;

(ii) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt.

48. Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und für $n = 2, 3, \dots$ sei a_n durch die Rekursion

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zum Beispiel zunächst induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = (-1)^n / 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) nachweisen. Letzteres erlaubt auch die explizite Bestimmung des Grenzwertes. Was ist sein Wert?

49. Sei $q \in (0, 1)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, mit der Eigenschaft

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzprinzips von Cauchy, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Lässt sich die Konvergenz auch beweisen, wenn $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt?

50. Untersuchen Sie die Monotonie und die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ für $n \geq 1$. Im Falle von Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

51. Sei die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ definiert durch $a_1 = x$ und $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, wobei $x \in [1, 2]$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

52. Bestimmen Sie jeweils alle Berührungspunkte und Häufungspunkte der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A := \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$;

(b) $B := ([1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)) \cap \mathbb{Q}$;

(c) C ist eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$.

53. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn a Berührungspunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

54. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergent sind und bestimmen Sie ihre Summen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{7^n}.$$

55. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right)$ konvergent ist und dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$ divergent ist.

56. Untersuchen Sie die Konvergenz und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}.$

57. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

alternierend ist und dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe. Setzen Sie Ihr Ergebnis in Beziehung zum Leibniz-Kriterium.

58. Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

59. Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}.$$

60. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$?

61. Gegeben Sie die Folge $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n \geq 1}$ streng monoton wachsend ist und dass $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = e$.

Hinweis. Zeigen Sie, dass $e_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

62. Sei $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Finden Sie ein $\delta > 0$, so dass für jedes x mit $|x-1| < \delta$ gilt $|f(x)-1| < \frac{1}{10}$.

63. An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen stetig?

$$(a) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \quad (b) \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

64. Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{falls } x \leq 3, \\ ax, & \text{falls } x > 3 \end{cases}$$

stetig ist.

65. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f(x) - x^2| \leq 2|x| \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(0) = 0$ und dass f stetig an der Stelle 0 ist.

66. Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren und, wenn ja, berechnen Sie diese:

$$(a) \lim_{x \searrow 1} \frac{x+1}{x-1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{(x+5)(x-1)} \right).$$

67. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (a, +\infty)$ und von $D \cap (-\infty, a)$ und $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = l = \lim_{x \nearrow a} f(x) \Leftrightarrow l = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

68. Gegeben seien die stetigen Funktionen

$$(a) f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ x+2, & \text{falls } 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (b) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Begründen Sie in beiden Fällen warum f nicht *als stetige Funktion in dem Punkt $x = 0$ fortgesetzt* werden kann.

69. Sei $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existiert und endlich ist. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.
70. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass mindestens ein $u \in \mathbb{R}$ mit $f(u) = u$ existiert.
71. Seien $a < b$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$$

mindestens eine Lösung im Intervall (a, b) besitzt.

72. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass:

- (a) f stetig ist;
 - (b) eine reelle Zahl $a > 0$ existiert, so dass für alle $|x| \leq a$ gilt $|f(x)| < a$;
 - (c) eine Zahl $u \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(u) = u$.
73. Untersuchen Sie ob die Funktion $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$, gleichmäßig stetig ist. Ist die Einschränkung von f auf $[1, +\infty)$ gleichmäßig stetig?
74. Es sei $D = [-2, -1] \cup (1, 2]$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{falls } -2 \leq x \leq -1, \\ x-1, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $f(D)$ und zeigen Sie, dass f als Abbildung $D \rightarrow f(D)$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $g : f(D) \rightarrow D$ explizit und begründen Sie, warum g an der Stelle 0 nicht stetig ist.

75. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{x}{2}$, bijektiv ist und dass ihre Umkehrfunktion stetig ist.
76. Lösen Sie die Ungleichungen

$$(a) \exp(x) + x - 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (b) \log(x)^2 - \log(x^3) + 2 \leq 0 \quad (x > 0).$$

77. Zeigen Sie, dass

$$\log(1+x) = x + o(|x|) \quad (x \rightarrow 0).$$

78. Zeigen Sie, dass

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

79. Lösen Sie in der Menge der komplexen Zahlen die Gleichung $z^3 = \bar{z}$.

80. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

- (i) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (iii) $\sin(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}, \quad \cos(2\alpha) = \frac{1-\tan(\alpha)^2}{1+\tan(\alpha)^2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (iv) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \quad \forall \alpha \in (-\pi, \pi);$
- (v) $\alpha \mapsto t := \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ ist bijektiv als Abbildung von $(-\pi, \pi)$ nach $\mathbb{R}$. Somit erhalten wir $\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) : \alpha \in (-\pi, \pi)\} = \left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}.$

81. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, nicht als stetige Funktion in dem Punkt $x = 0$ fortgesetzt werden kann.

82. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass:

- (i) f stetig (auf $\mathbb{R}$) ist;
- (ii) keine Umgebung $U_\delta(0)$ von 0 existiert, so dass f auf $U_\delta(0)$ monoton ist.

83. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{4x} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan(x) - \sin(x)}{x} \qquad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{x^2}.$$

84. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\frac{1}{4x-\pi}}.$$

85. Sei $\alpha \geq 1$. Untersuchen Sie ob die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist.

86. Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

87. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{falls } x \leq 0, \\ a \sin(x) + b \cos(x), & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist.

88. Bestimmen Sie die Tangenten an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2$, die durch den Ursprung verlaufen.
89. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den maximalen Definitions- und Differenzierbarkeitsbereich und ermitteln Sie die Ableitung:

$$(a) f(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 \quad (b) f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad (c) f(x) = \log(\log(x)) \quad (d) f(x) = \sqrt{-4x}.$$

90. Bestimmen Sie $p, q \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $y(x) = e^{-2x} \sin(3x)$ die Gleichung

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Zur Verfügung gestellt von:

Radu Ioan Boț

UE Einführung in die Analysis

WiSe 2017/18

LV-Nr.: 250012

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Danke!