

Universität Wien

Fakultät für Mathematik

Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

Zur Verfügung gestellt von:

Maria Charina und Stefan Haller

PR StEOP Einführung in die Mathematik, WiSe 2018/19

LV-Nr.: 250032

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Danke!

STEOP: Modulprüfung — Einführung in die Mathematik

2. Termin am 10. Jänner 2019, 8:00–9:30 Uhr in HS 1 und HS 6

Prüfungseinsicht: ???

Nachname: Vorname:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

1. Antritt

2. Antritt

3. Antritt

4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	20 – 24	25 – 29	30 – 34	≥ 35

Aufgabe 1: (7 Punkte)

- (a) Definieren Sie die Mengendifferenz $A \setminus B$ zweier Mengen A und B .
 (b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für beliebige Mengen A und B gilt

$$(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A).$$

a)

$$A \setminus B = \{ \underbrace{x \in A}_{\text{IP.}} \mid \underbrace{x \notin B}_{\text{IP.}} \}$$

IP. falls insgesamt korrekte Beschreibung (verbal oder ~~kurz~~ mittels Mengenschreibweise)

b)

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap A$	$B \cap A$	$A \cup (B \cap A)$
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin
\notin	\in	\in	\notin	\notin	\notin
\in	\notin	\in	\in	\notin	\in
\in	\in	\in	\in	\in	\in

IP.
ident
IP.
IP.

IP. $(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A)$ ~~IP.~~

andere (schlüssige) Argumentation auch zulässig

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage **mittels vollständiger Induktion**: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$2^n \geq n + 2.$$

IA ($n=2$):

$$\underbrace{2^2}_{4} \geq \underbrace{2+2}_{4} \quad \text{I.P.} \quad \text{w. A.} \quad \text{I.P.}$$

IV: Sei $n \geq 2$ und $2^n \geq n+2$ I.P.

IS: z.z. $2^{n+1} \geq n+3$ I.P. bzw. $(n+1)+2$

$2^{n+1} = 2^n + 2^n$	$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$
$\geq (n+2) + \underbrace{(n+2)}_{\geq 1}$	$\geq 2(n+2)$
$\geq n+3$	$= n+3 + \underbrace{n+1}_{\geq 0}$
$\geq n+3$ I.P.	$\geq n+3$

Aufgabe 3: (7 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_7$ der Gleichung $x^2 = \bar{2}$.
 (b) Welche Elemente von \mathbb{Z}_6 besitzen ein multiplikatives Inverses? Geben Sie die Inversen aller invertierbaren Elemente an.

a)

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$x_1 = \bar{3}$

(1P)

$x_2 = \bar{4}$

(1P)

$L = \{ \bar{3}, \bar{4} \}$

Keine falschen Lösungen

(1P)

b) Invertierbare Elemente: $\bar{1}, \bar{5} = -\bar{1}$

1P, 1P

Inverse: $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$ 1P

1P

denn $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ und $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{25} = \bar{1}$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

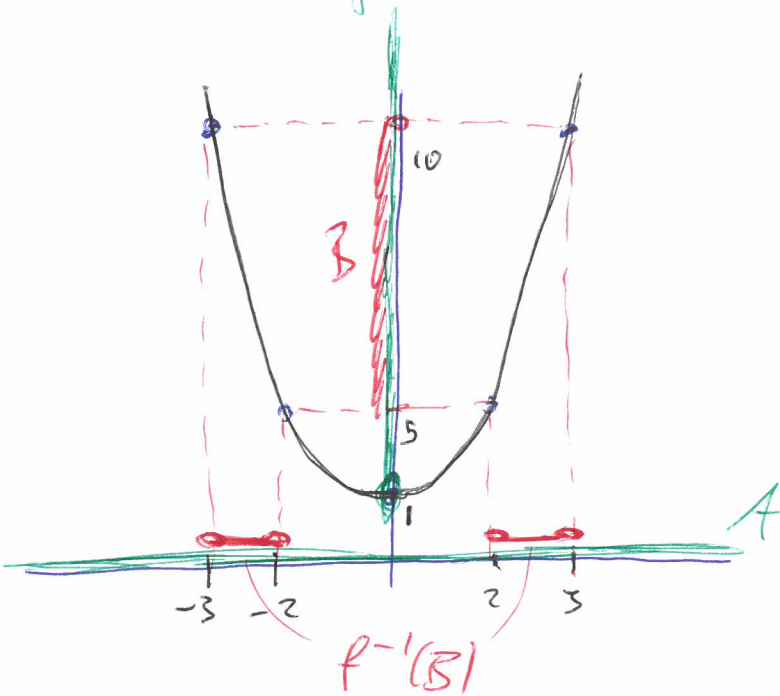
- (a) Betrachten Sie die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + 1$ sowie die Teilmengen $A := \mathbb{R}$ und $B := [5, 10]$. Bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$ und die Urbildmenge $f^{-1}(B)$.
- (b) Bestimmen Sie eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$, sodass $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow C$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$ eine Bijektion definiert und geben Sie die Umkehrabbildung von g (inkl. Definitions- und Zielbereich) an.

a) $f(A) = [1, \infty)$ 1 P. (Grenzen)

$f^{-1}(B) = [-3, -2] \cup [2, 3]$ 1 P. (Grenzen)

$f(A)$ 1 P.

1 P. (Grenzen)



$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow f(x) \in B \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 1 \in [5, 10] \\
 &\Leftrightarrow 5 \leq x^2 + 1 \leq 10 \\
 &\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \\
 &\Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \\
 &\Leftrightarrow x \in [2, 3] \cup [-3, -2]
 \end{aligned}$$

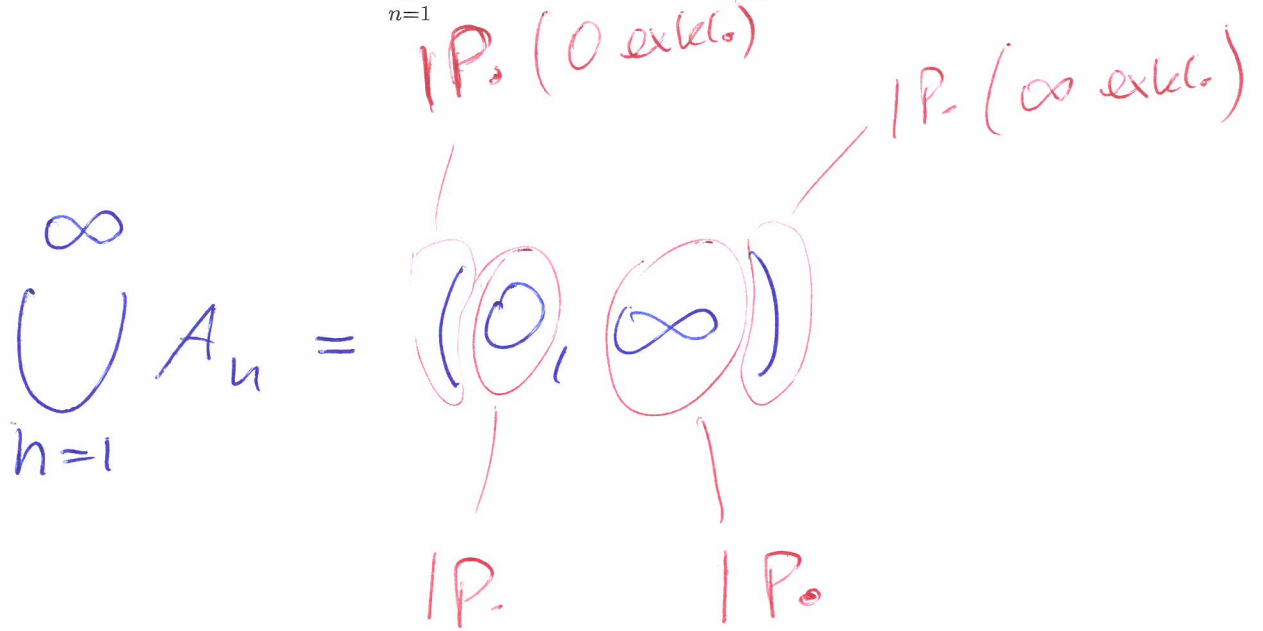
b) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 1 P.

$g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, 1 P.

$g^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 1$ 1 P.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Mengenvereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ der Intervalle $A_n := [\frac{1}{n}, n]$.



Intervall IP₀

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit -1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Sind $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

- wahr
 falsch

(b) Es gibt Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$, sodass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

- wahr
 falsch

(c) Welche der folgenden komplexen Zahlen stimmt mit i^7 überein?

- 1
 -i

(d) Welche der folgenden Aussagen ist zu $r \Rightarrow p \vee q$ äquivalent?

- $r \wedge \neg p \Rightarrow q$
 $p \wedge q \Rightarrow \neg r$

(e) Welcher der folgenden beiden Ausdrücke stimmt mit der Summe $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ überein?

- $\sum_{j=1}^m \frac{-(-1)^j}{j+2}$
 $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{(-1)^i}{i-1}$

Zusatzblatt: