

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(i) Definieren Sie den Begriff *neutrales Element* einer Gruppe (G, \circ) .

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Verknüpfung $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \otimes b = a \cdot b - 2$ ist assoziativ.

(i) $e \in G$ heißt neutrales Element von (G, \circ) ,
wenn $\forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$ 1P

(ii) $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \otimes b = a \cdot b - 2$ ist nicht
assoziativ, da für $a = 1$ und $c = -1$,
 $b \in \mathbb{R}$ gilt 1P

$$(1 \otimes b) \otimes (-1) = (b - 2) \cdot (-1) - 2 = -b \quad 1P$$

$$1 \otimes (b \otimes (-1)) = -b - 2 - 2 \quad 1P$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

I.A. $n=0$ $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ 1P

I.V. $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ 2P

I.S. $\sum_{k=0}^{n+1} q^{k+1} = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \text{I.V.}$ 1P

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

1P

Aufgabe 3:

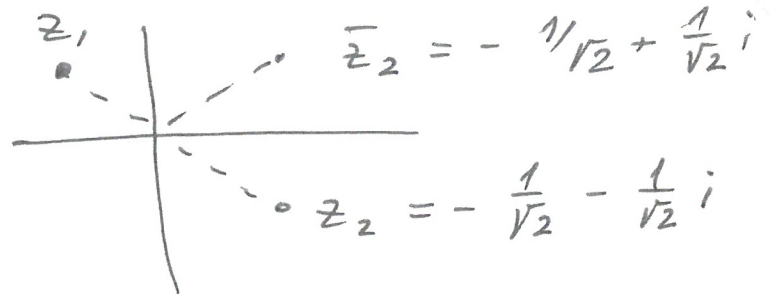
6 Punkte)

Ergänzen Sie die folgende Tabelle und geben Sie die entsprechenden Rechenschritte an.

z	\bar{z}	z^2	$ z ^2$	$0 \leq \phi = \arg(z) < 2\pi$
1) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-i$	1	$\pi \leq \phi < 2\pi$
2) $\sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$	$\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$	$2i$	2	$\frac{5\pi}{4}$

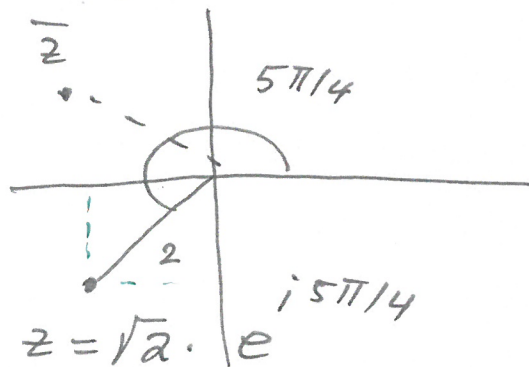
1) $z^2 = -i = e^{i(3\pi/2 + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$

$z_{1,2} = e^{i(3\pi/4 + 2\pi k)}, k = 0, 1$



$|z|^2 = 1$

2)



$|z|^2 = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

$z^2 = \sqrt{4} e^{i 10\pi/4} = 2i$

Aufgabe 4: (7 Punkte)

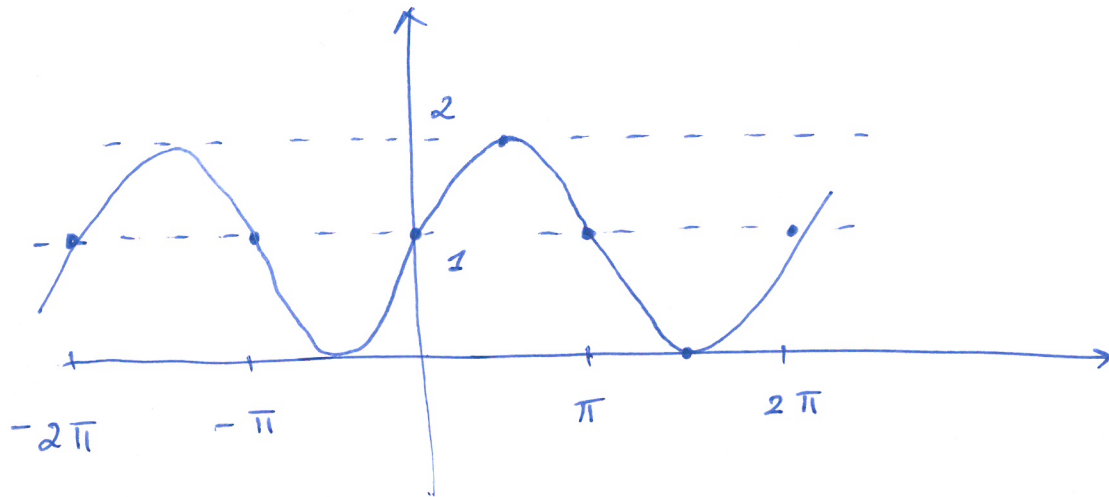
(i) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + 1$ und die Mengen $A = [0, \pi)$ und $B = [-1, 1]$ bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$ und die Urbildmenge $f^{-1}(B)$.

(ii) Für die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x + 1) \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2.$$

bestimmen Sie die Funktion $f \circ g$, falls diese existiert. Geben Sie gegebenenfalls den Definitions- und Bildbereich von $f \circ g$ an.

(i)



$$f([0, \pi]) = [1, 2] \quad 2$$

$$f^{-1}([-1, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi] \quad 3$$

(ii) $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2 + 1).$$

2

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus die ganzen Zahlen n und m , so dass $\text{ggT}(25, 11) = n \cdot 25 + m \cdot 11$.

Geben Sie alle Rechenschritte an.

$$3P. \quad \left\{ \begin{array}{l} 25 = 2 \cdot 11 + 3 \\ 11 = 3 \cdot 3 + 2 \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 1 = 3 + (-1) \cdot 2 = 3 + (-1)(11 + (-3) \cdot 3)$$

$$5P. \quad \left\{ \begin{array}{l} = (-1) \cdot 11 + 4 \cdot 3 = \\ (-1) \cdot 11 + 4(25 + (-2) \cdot 11) \\ = \underbrace{4 \cdot 25}_n + \underbrace{(-9) \cdot 11}_m \end{array} \right.$$

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit -1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n 6^{i+j} \right) = \left(\sum_{i=1}^n 2^i \right) \left(\sum_{j=1}^n 3^j \right)$.

Wahr

Falsch

(b) Seien p, q Aussagen. Eine Verneinung von $p \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ist

$\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow q)$

$\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(c) Alle reellen Lösungen von $x + 1 < |x|$ erfüllen

$x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$

$x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

(d) Die Umkehrfunktion von $f : [1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x$ existiert.

Wahr

Falsch

(e) Sei M eine nicht leere Menge. Die Relation \subseteq ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

Wahr

Falsch