Zur Verfügung gestellt von:
Roland Donninger
PR Funktionentheorie für das Lehramt, WiSe 2022/23
LV-Nr.: 250059
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Prüfung Funktionentheorie für das Lehramt

Donnerstag, 2. Februar 2023, 15:00–16:30, HS04

1. (4 Punkte) Berechnen Sie für $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{3+4i}\right), \qquad \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi}\right), \qquad |3+4i|, \qquad \overline{1+i}$$

2. (6 Punkte)

   (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Leiten Sie die Summenformel für

$$\sum_{k=0}^{n} z^k$$

   her.

   (b) Unter welchen Voraussetzungen an z existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \quad ?$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

   (c) Berechnen Sie

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k\right).$$

3. (6 Punkte) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Potenzreihe.

   (a) Definieren Sie den Begriff des *Konvergenzradius*.

   (b) Erklären Sie, was der Konvergenzradius über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe aussagt.

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} i^k z^k.$$

4. (6 Punkte)

   (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Definieren Sie: f ist komplex differenzierbar (holomorph) bei $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2$. Beweisen Sie (direkt aus der Definition), dass f komplex differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$ ist mit der Ableitung $f'(z) = 2z$.

   (c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \overline{z}$. Zeigen Sie: f is nirgends komplex differenzierbar.

5. (6 Punkte)

   (a) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Definieren Sie das Kurvenintegral
   $$\int_\gamma f(z) dz.$$

   (b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie
   $$\int_\gamma e^z dz.$$

   (c) Sei $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{it}$. Berechnen Sie
   $$\int_\gamma \frac{1}{z} dz.$$