Lösungsvorschläge zum ersten Termin der Modulprüfung

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$ definiert.

Bestimmen Sie, ob f injektiv ist und ob f surjektiv ist.

Berechnen Sie zudem das Bild des Intervalls $[-5, 2]$ sowie das Urbild des Intervalls $[-1, 4]$.

(b) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Wir definieren die Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(X)$ dadurch, daß $A \sim B$ genau dann gelte, wenn die symmetrische Differenz $A \triangle B$ leer ist oder endlich viele Elemente besitzt.

Bestimmen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung.

(a) *Wir haben $f(1) = f(-1) = 1$, und daher ist f nicht injektiv. Wir haben auch $-1 \notin f(\mathbb{R})$, und somit ist f auch nicht surjektiv. Für die verlangten Bilder und Urbilder bekommen wir:*

$$f([-5, 2]) = \{f(x) | x \in [-5, 2]\} = [0, 25] \text{ und}$$
$$f^{-1}([-1, 4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-1, 4]\} = [-2, 2].$$

(b) *Wir verifizieren die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.*

Reflexiv: *$A \triangle A = \varnothing$ besitzt keine Elemente.*

Symmetrisch: *$A \triangle B = B \triangle A$ wegen der Symmetrie der symmetrischen Differenz.*

Transitiv: *Nehmen wir an, daß $A \sim B$ und $B \sim C$ gilt. Wir wollen beweisen, daß $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ höchstens endlich ist. Wir bemerken dazu, daß*

$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

ist, wo beide Mengen $A \setminus B$ und $B \setminus C$ nach Voraussetzung höchstens endlich viele Elemente besitzen. Daraus folgt, daß $A \setminus C$ höchstens endlich viele Elemente enthält. Ähnlich bekommen wir, daß

$$C \setminus A \subset (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

höchstens endlich viele Elemente hat.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Ungleichungen

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n.$$

(b) Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Partialsummen

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ eine ungerade Zahl $p_n \in 2\mathbb{N}+1$ und eine gerade Zahl $q_n \in 2\mathbb{N}$ existieren, für die

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

ist, und schließen Sie daraus, daß u_n für kein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ eine ganze Zahl ist.

Lösung.

(a) Für $n = 1$ haben wir trivialerweise

$$1 = 2^0 \leqslant 1! \leqslant 1^1 = 1.$$

Nehmen wir an, daß die Ungleichungen für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gelten. Dann haben wir (wir verwenden, daß $n+1 \geqslant 2$ ist)

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leqslant 2 \cdot n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$$

sowie

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \leqslant n^n \cdot (n+1) \leqslant (n+1)^n \cdot (n+1) = (n+1)^{n+1}.$$

(b) **1. Variante:** Wir beweisen die Eigenschaft durch vollständige Induktion. Die Eigenschaft ist für $u_2 = \frac{3}{2}$ und $u_3 = \frac{11}{6}$ klar. Nehmen wir an, daß $u_k = \frac{p_k}{2q_k}$ mit einer ungeraden Zahl p_k für alle $k \in [2,N]_{\mathbb{N}}$ für ein $N \in [3,\infty)_{\mathbb{N}}$ gilt. Dann schreiben wir, falls $N+1 =: 2n$ gerade ist ($n \leqslant N$),

$$u_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

Einerseits ist nun

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{a}{b},$$

wo b als Produkt ungerader Zahlen ungerade ist. Andererseits haben wir dank der Induktionsvoraussetzung auch $u_n = \frac{p_n}{2q_n}$, woraus wir schließen, daß

$$u_{2n} = \frac{a}{b} + \frac{p_n}{4q_n} = \frac{4aq_n + bp_n}{4bq_n}$$

ist, wobei bp_n und daher auch $4aq_n + bp_n$ ungerade und $4bq_n$ gerade ist. Daraus folgt

$$u_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$$

mit p_{2n} ungerade und q_{2n} gerade.
Falls $N + 1 =: 2n + 1$ ungerade ist ($n \leqslant N$), schreiben wir analog

$$u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} u_n$$

und bekommen genauso $u_{2n+1} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ mit den richtigen Paritäten.

2. Variante: Wir sehen, daß $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ der Quotient einer ungeraden und einer geraden Zahl ist. Nehmen wir an, wir haben $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit einer ungeraden Zahl p_n und einer geraden Zahl q_n für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$u_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{p_n(n+1) + q_n}{q_n(n+1)}.$$

Wir schreiben jetzt $n + 1 = 2^{\alpha_n} k_n$ mit k_n ungerade und $\alpha_n \in \mathbb{N}$ und $q_n = 2^{\beta_n} \tilde{q}_n$ mit $\tilde{q}_n$ ungerade und $\beta_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, da q_n nach Annahme gerade ist. Wir haben dann

$$u_{n+1} = \frac{2^{\alpha_n} p_n k + 2^{\beta_n} \tilde{q}_n}{2^{\alpha_n + \beta_n} k_n \tilde{q}_n}.$$

Wir kürzen den Bruch durch 2^{γ_n} mit $\gamma_n := \min\{\alpha_n, \beta_n\}$ und bekommen

$$u_{n+1} = \frac{2^{\alpha_n - \gamma_n} p_n k_n + 2^{\beta_n - \gamma_n} \tilde{q}_n}{2^{\alpha_n + \beta_n - \gamma_n} k_n \tilde{q}_n},$$

wobei $\alpha_n + \beta_n - \gamma_n = \max\{\alpha_n, \beta_n\} \geqslant 1$ ist, da $\beta_n \geqslant 1$ ist.
Setzen wir daher

$$q_{n+1} := 2^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} k_n \tilde{q}_n \in 2\mathbb{Z},$$

so haben wir also $\beta_{n+1} = \max\{\alpha_n, \beta_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ und $\beta_2 = 1$. Da die Exponenten α_m, $m \in \mathbb{N}$, nach Definition für alle $\ell \in \mathbb{N}$ den Ungleichungen

$$\alpha_m < \ell \text{ für alle } m \in [0, 2^\ell - 1)_{\mathbb{N}},$$
$$\alpha_m = \ell \text{ für } m = 2^\ell - 1,$$
$$\alpha_m < \ell \text{ für alle } m \in [2^\ell, 2^{\ell+1} - 1)_{\mathbb{N}}$$

genügen, haben wir $\beta_m = \ell$ für alle $m \in [2^\ell, 2^{\ell+1})_{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{N}$.
Insbesondere ist $\beta_m \neq \alpha_m$ für alle $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, weshalb

$$p_{n+1} := 2^{\alpha_n - \gamma_n} p_n k_n + 2^{\beta_n - \gamma_n} \tilde{q}_n$$

als Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ bildet.

(b) Sei $(R, +, \cdot)$ ein endlicher, kommutativer Ring ohne Nullteiler.
Zeigen Sie, daß für jedes $x \in R\backslash\{0\}$ die Funktion

$$f_x : R \to R,\ f_x(y) := x \cdot y,$$

bijektiv ist, und folgern Sie, daß R ein Körper ist.

Lösung.

(a) *Wir haben klarerweise $1 \in \mathcal{U}$. Seien nun $z, \tilde{z}$ in $\mathcal{U}$. Wir können dann*

$$\left|z \cdot \frac{1}{\tilde{z}}\right| = \frac{|z|}{|\tilde{z}|} = \frac{1}{1} = 1$$

schreiben, was $z \cdot \frac{1}{\tilde{z}} \in \mathcal{U}$ liefert und daher zeigt, daß $\mathcal{U}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist.

(b) *Wir zeigen zuerst, daß f_x injektiv ist. Seien $y, \tilde{y} \in R$ zwei Werte mit*

$$x \cdot y = f_x(y) = f_x(\tilde{y}) = x \cdot \tilde{y}.$$

Dann haben wir also

$$x \cdot (y - \tilde{y}) = 0$$

und da $x \neq 0$ ist, folgt daraus, daß R nullteilerfrei ist, daß $y = \tilde{y}$ sein muß. Also ist f_x injektiv.

Da f_x eine injektive Abbildung der endlichen Menge R auf sich selbst ist, ist sie zwangsläufig auch surjektiv und damit bijektiv.

Daraus folgt nun, daß für jedes $x \neq 0$ ein Punkt $y \in R$ mit $f_x(y) = 1$, also $x \cdot y = y \cdot x = 1$ existiert, was bedeutet, daß jedes Element $x \neq 0$ invertierbar und damit R ein Körper ist.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Finden Sie Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit

$$805\lambda + 273\mu = 7.$$

(b) Seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ zwei endliche, zyklische Gruppen. Wir definieren die Produktgruppe $(G \times H, *_{G\times H})$ auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ mit der durch

$$\forall g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H : (g_1, h_1) *_{G\times H} (g_2, h_2) := (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

gegebenen komponentenweisen Verknüpfung $*_{G\times H}$.

Zeigen Sie, daß $(G \times H, *_{G\times H})$ eine zyklische Gruppe ist, falls

$$\mathrm{ggT}(\mathrm{card}(G), \mathrm{card}(H)) = 1$$

ist.

Lösung.

(a) Wir berechnen den größten gemeinsamen Teiler von 805 und 273 und finden

$$\begin{aligned}
805 &= 2 \cdot 273 + 259,\\
273 &= 1 \cdot 259 + 14,\\
259 &= 18 \cdot 14 + 7,\\
14 &= 2 \cdot 7,
\end{aligned}$$

also $\mathrm{ggT}(805, 273) = 7$, weshalb die Gleichung eine Lösung besitzt, die wir mittels rückwärts Einsetzen bestimmen können:

$$\begin{aligned}
7 &= 259 - 18 \cdot 14,\\
7 &= 259 - 18 \cdot (273 - 259) = -18 \cdot 273 + 19 \cdot 259,\\
7 &= -18 \cdot 273 + 19 \cdot (805 - 2 \cdot 273) = 19 \cdot 805 - 56 \cdot 273,
\end{aligned}$$

womit wir die Lösung $\lambda = 19$ und $\mu = -56$ gefunden haben.

(b) Sei $m := \mathrm{card}(G)$ und $n := \mathrm{card}(H)$. Dann gibt es $g \in G$ und $h \in H$ mit $G = \{g^k \mid k \in [0, m)_{\mathbb{N}}\}$ und $H = \{h^\ell \mid \ell \in [0, n)_{\mathbb{N}}\}$.

1. Variante: Wir zeigen, daß die Ordnung von (g, h) (das ist $\mathrm{card}\langle(g, h)\rangle$) größer gleich und damit zwangsläufig gleich $\mathrm{card}(G \times H) = mn$ ist. Dazu bemerken wir, daß $\alpha \in \mathbb{Z}$ genau dann eine Lösung von

$$(g, h)^\alpha = (e_G, e_H)$$

ist, wenn $g^\alpha = e_G$, also $m \mid \alpha$, und $h^\alpha = e_H$, also $n \mid \alpha$ gilt, wobei e_G und e_H die neutralen Elemente der Gruppen G und H bezeichnen.

Die Menge der Lösungen ist daher gerade $\mathrm{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$.

Also ist die Ordnung von (g, h) zumindest $\mathrm{kgV}(m, n) = \mathrm{ggT}(m, n)\,\mathrm{kgV}(m, n) = mn$, was zeigt, daß $\mathrm{card}\langle(g, h)\rangle = \mathrm{card}(G \times H)$ ist, weshalb $G \times H$ zyklisch ist.

2. Variante: Da $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist, finden wir nach dem chinesischen Restklassensatz für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ein $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv k \mod m \text{ und} \\ \alpha &\equiv \ell \mod n. \end{aligned}$$

Damit gilt dann $(g^k, h^\ell) = (g^\alpha, h^\alpha) = (g, h)^\alpha$, weshalb (g, h) die Gruppe $G \times H$ erzeugt.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$|z|^2 + (1-\mathrm{i})z - (1-\mathrm{i})\bar{z} = (1-\mathrm{i})^2.$$

(b) Berechnen Sie das Supremum und das Infimum der Teilmenge

$$K := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in (1,2) \right\} \subset \mathbb{R}.$$

(Ein Beweis, daß es sich bei den gefundenen Werten in der Tat um das Supremum und das Infimum handelt, wird erwartet.)

Lösung.

(a) *Wir schreiben $z = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann lautet die Gleichung für z gerade*

$$-2\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})^2 = |z|^2 + (1-\mathrm{i})(z - \bar{z}) = a^2 + b^2 + 2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})b.$$

Die Gleichungen für Real- und Imaginärteil lauten daher

$$a^2 + b^2 + 2b = 0 \text{ und } 2b = -2.$$

Die zweite Gleichung liefert uns direkt $b = -1$ und damit bekommen wir aus der ersten Gleichung $a^2 = 1$, also $a \in \{-1, 1\}$.

Also haben wir gerade die beiden Lösungen $z = 1 - \mathrm{i}$ und $z = -1 - \mathrm{i}$.

(b)

- *Es gilt offenbar für alle $a, b \in (1,2)$ die Abschätzung*

  $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 2,$$

  weshalb $\frac{1}{2} \leqslant \inf K \leqslant \sup K \leqslant 2$ gilt.
- *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen wir $a \in (2 - \frac{\varepsilon}{3}, 2)$ und $b \in (1, 1 + \frac{\varepsilon}{3})$, so gilt*

  $$\frac{a}{b} \geqslant \frac{2 - \frac{\varepsilon}{3}}{1 + \frac{\varepsilon}{3}} = 2 - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{3}} > 2 - \varepsilon.$$

  Daher kann es keine obere Schranke an K geben, die kleiner als 2 ist, womit $\sup K = 2$ gezeigt ist.
- *Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig. Wählen wir $a \in (1, 1 + \varepsilon)$ und $b \in (2 - \varepsilon, 2)$, so gilt*

  $$\frac{a}{b} \leqslant \frac{1 + \varepsilon}{2 - \varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\varepsilon}{2 - \varepsilon} < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

  Daher kann es keine untere Schranke an K geben, die größer als $\frac{1}{2}$ ist, womit $\inf K = \frac{1}{2}$ gezeigt ist.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie, ob die durch

$$x_k := \sqrt{2k^2+1} - \sqrt{2k^2-1},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

gegebene Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $[0,+\infty)$ mit $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Beweisen Sie, daß die Reihe

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{i}^j\, a_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Lösung.

(a) Wir bemerken, daß sich x_k für alle $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ in der Form

$$x_k = \frac{(2k^2+1)-(2k^2-1)}{\sqrt{2k^2+1}+\sqrt{2k^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2+1}+\sqrt{2k^2-1}}$$

schreiben läßt. Damit ist

$$0 \leqslant x_k \leqslant \frac{2}{\sqrt{2k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k} \to 0\ (k\to\infty),$$

weshalb $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ ist.

(b) Die Reihe $(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{i}^j\, a_j)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil konvergiert. Für alle $k\in\mathbb{N}$ haben wir nun

$$\Re\mathrm{e} \sum_{j=0}^{2k} \mathrm{i}^j\, a_j = \Re\mathrm{e} \sum_{j=0}^{2k+1} \mathrm{i}^j\, a_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, a_{2j} \text{ und}$$

$$\Im\mathrm{m} \sum_{j=0}^{2k+1} \mathrm{i}^j\, a_j = \Im\mathrm{m} \sum_{j=0}^{2k+2} \mathrm{i}^j\, a_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, a_{2j+1}.$$

Da $(a_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ sowie $(a_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ als Teilfolgen von $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen in $[0,\infty)$ sind, konvergieren die alternierenden Reihen $(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\, a_{2j})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\, a_{2j+1})_{k\in\mathbb{N}}$, weshalb auch der Real- und der Imaginärteil der Reihe $(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{i}^j\, a_j)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.