Modulprüfung, zweiter Termin

Name:	
Matrikelnummer:	

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir definieren auf $\mathbb{C}$ die Relation $\mathcal{R}$ dadurch, daß $w\mathcal{R}z$ genau dann gelte, wenn $\Re\mathrm{e}(w) \leqslant \Re\mathrm{e}(z)$ und $\Im\mathrm{m}(w) \leqslant \Im\mathrm{m}(z)$ ist.

Bestimmen Sie, ob $\mathcal{R}$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ ist und ob $(\mathbb{C}, \mathcal{R})$ total geordnet ist.

(b) Seien X und Y zwei Mengen, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ nicht leere Teilmengen mit $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ und $f_1\colon A_1 \to B_1$ und $f_2\colon A_2 \to B_2$ zwei bijektive Funktion.

Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, daß dann eine bijektive Funktion $g\colon A_1 \cap A_2 \to B_1 \cap B_2$ existieren muß.

Lösung.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, daß die Zahl $x^n - y^n$ ein ganzzahliges Vielfaches von $x - y$ ist.

(b) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, +\infty)$, die rekursiv durch die Gleichung

$$x_{k+1} \coloneqq 2 + \sqrt{x_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

und den Anfangswert $x_0 \coloneqq 5$ gegeben ist.

Zeigen Sie, daß $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist und $x_k \in (4, 5]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie, ob die Teilmenge $K := \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ des Körpers $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit der komplexen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

(b) Sei G eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ mit der Eigenschaft, daß

$$a := \inf\{g \in G \mid g > 0\} > 0$$

ist. Beweisen Sie, daß

$$G = a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

gilt.

Lösung.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$, das durch 4 teilbar ist und die Kongruenzen

$$x \equiv 2 \mod 3$$
$$x \equiv 3 \mod 7$$

erfüllt.

(b) Sei p eine Primzahl, für die auch $8p^2 + 1$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, daß $p = 3$ ist.

Lösung.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß $x = y$ genau dann gilt, wenn wir für alle $\varepsilon > 0$

$$|x - y| < \varepsilon$$

haben.

(b) Sei $P \subset \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge der Primzahlen. Zeigen Sie, daß die Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \prod_{p \in P} (z^2 - p),$$

keine rationale Nullstelle besitzt.

Lösung.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - 2^n}{\alpha^n + 2^n}.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

gilt.

Lösung.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).