Übungsblatt 3A

Beispiel 1.

Wir betrachten das Alphabet $A := \{a, b, c, \ldots, z\}$, versehen mit der üblichen Ordnung $\leq$ (das heißt, es gilt $\alpha \leq \beta$ genau dann, wenn das Zeichen $\alpha \in A$ früher im Alphabet vorkommt als das Zeichen $\beta \in A$). Wir definieren auf der Menge A^2 der aus zwei Buchstaben bestehenden Worte die lexikographische Ordnungsrelation $\preceq$ dadurch, daß für alle $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \in A$

$$\big((\alpha, \beta) \preceq (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\big) \Leftrightarrow \Big(\big((\alpha \neq \tilde{\alpha}) \wedge (\alpha \leq \tilde{\alpha})\big) \vee \big((\alpha = \tilde{\alpha}) \wedge (\beta \leq \tilde{\beta})\big)\Big)$$

gelte.

Zeigen Sie, daß $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf A^2 ist und $(A^2, \preceq)$ total geordnet ist.

Beispiel 2.

Seien $\sim_1$ und $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen und $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei Ordnungsrelationen auf einer Menge X. Wir definieren die Relation $\mathfrak{R}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{R}y$ genau dann erfüllt sei, wenn

(a) $(x \sim_1 y) \wedge (x \sim_2 y)$,

(b) $(x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y)$,

(c) $(x\mathcal{R}_1 y) \wedge (x\mathcal{R}_2 y)$,

(d) $(x\mathcal{R}_1 y) \vee (x\mathcal{R}_2 y)$,

(e) $(x \sim_1 y) \wedge (x\mathcal{R}_1 y)$ beziehungsweise

(f) $(x \sim_1 y) \vee (x\mathcal{R}_1 y)$

gilt.

Bestimmen Sie, ob die Relation $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist und ob sie eine Ordnungsrelation ist.

Beispiel 3.

Wir definieren eine strikte Ordnungsrelation $\mathfrak{S}$ auf einer Menge X als eine transitive Relation auf X, die zudem irreflexiv und asymmetrisch ist, das heißt, für kein $x \in X$ sei $x\mathfrak{S}x$ erfüllt und für alle $x, y \in X$ gelte $(x\mathfrak{S}y) \Rightarrow \neg(y\mathfrak{S}x)$.

(a) Sei $\mathfrak{R}$ eine Ordnungsrelation. Wir definieren die Relation $\mathfrak{S}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{S}y$ genau dann gelte, wenn

$$(x\mathfrak{R}y) \wedge (x \neq y)$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}$ eine strikte Ordnungsrelation ist.

(b) Sei umgekehrt $\mathfrak{S}$ eine strikte Ordnungsrelation. Wir definieren die Relation $\mathfrak{R}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{R}y$ genau dann gelte, wenn

$$(x\mathfrak{S}y) \vee (x = y)$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{R}$ eine Ordnungsrelation ist.

Beispiel 4.

Sei X eine Menge. Wir definieren für eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ die charakteristische Funktion

$$\mathbf{1}_A \colon X \to \{0, 1\},\ \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen

(a) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto 1 - \mathbf{1}_A(x)$,

(b) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$, und

(c) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$,

für beliebige Teilmengen $A, B \subset X$ ebenfalls charakteristische Funktionen sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Teilmengen.

Beispiel 5.

Seien X, Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß

(a) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ für alle $A \subset X$ und

(b) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ für alle $B \subset Y$

gilt. Geben Sie jeweils ein Beispiel für A beziehungsweise B, für die diese Beziehung eine echte Inklusion ist, oder beweisen Sie, daß immer Gleichheit gilt.

Beispiel 6.

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y, für die es eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in X$$

gibt und zumindest ein $y \in Y$ mit $f(g(y)) \neq y$ existiert.

Kann man ein solches Beispiel auch im Fall, wo $X = Y$ ist, finden?