Übungsblatt 3B

Beispiel 1.
Wir betrachten die durch

(a) $f_1\colon (-1,1) \to (0,2)$, $f_1(x) \coloneqq \frac{1}{1+x^2}$,

(b) $f_2\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f_2(x) \coloneqq \sin(x)$,

(c) $f_3\colon [-2,2] \to [0,16]$, $f_3(x) \coloneqq x^4$, und

(d) $f_4\colon [-2,2] \to [-16,16]$, $f_4(x) \coloneqq x^3$,

definierte Funktionen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen injektiv sind, ob sie surjektiv sind, und ob sie bijektiv sind.

Beispiel 2.
Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \log\big(1 + (x-1)^2\big).$$

Bestimmen Sie das größte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $-1 \in I$, für das die Einschränkung $f|_I\colon I \to \mathbb{R}$ auf I injektiv ist, und berechnen Sie die inverse Funktion von $f|_I$.

Beispiel 3.
Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X und Y.

(a) Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset X$

$$f(A^{\mathrm{c}}) \subset f(A)^{\mathrm{c}}$$

gilt, falls f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset X$

$$f(A)^{\mathrm{c}} \subset f(A^{\mathrm{c}})$$

gilt, falls f surjektiv ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f und einer Teilmenge $A \subset X$, so daß weder

$$f(A^{\mathrm{c}}) \subset f(A)^{\mathrm{c}} \text{ noch } f(A)^{\mathrm{c}} \subset f(A^{\mathrm{c}})$$

gilt.

(Die Komplemente sind dabei stets als Komplemente in X beziehungsweise in Y zu verstehen.)

Beispiel 4.
Für beliebige natürliche Zahlen m, n sei X eine Menge mit n und Y eine Menge mit m Elementen.

(a) Wieviele verschiedene binäre Relationen zwischen X und Y gibt es?

(b) Wieviele verschiedene Funktionen von X nach Y gibt es?

(c) Wieviele verschiedene bijektive Funktionen von X nach Y gibt es?

Beispiel 5.
Seien X und Y zwei Mengen mit der gleichen Kardinalität und $f\colon X \to Y$ sei eine injektive Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f bijektiv ist, falls X endlich viele Elemente enthält.

(b) Muß das auch gelten, wenn X nicht endlich viele Elemente besitzt? Beweisen Sie die entsprechende Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel dafür.

Beispiel 6.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X und Y. Wir definieren die Funktionen

$$f^*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),\ f^*(A) \coloneqq f(A) \text{ und}$$
$$f_*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),\ f_*(B) \coloneqq f^{-1}(B).$$

Zeigen Sie,

(a) daß die Funktion f^* genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist, und

(b) daß f_* genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.