Peter Elbau
Gwenael Mercier

Übungsblatt 4A

Beispiel 1.

Zeigen Sie, daß

(a) eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert und

(b) folgern Sie damit, daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Beispiel 2.

Sei I eine beliebige Indexmenge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{A} \coloneqq \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in \{0,1\}\}$ aller Familien $(a_i)_{i\in I}$ in $\{0,1\}$. Zeigen Sie, daß die Kardinalität von $\mathcal{A}$ strikt größer ist als diejenige von I.

Beispiel 3.

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Beispiel 4.

Zeigen Sei, daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Ungleichungen

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}$ und

(b) $\displaystyle\frac{3n}{2n+1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

erfüllt sind.

Beispiel 5.

Sei X eine Menge. Für eine Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Familie von Teilmengen von X definieren wir die symmetrische Differenz $\triangle_{i=1}^{n} A_i$ der ersten n Mengen A_i rekursiv durch

$$\mathop{\triangle}_{i=1}^{2} A_i \coloneqq A_1 \triangle A_2 \text{ und } \mathop{\triangle}_{i=1}^{n+1} A_i \coloneqq \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle A_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.$$

Zeigen Sie, daß $\triangle_{i=1}^{n} A_i$ genau aus den Elementen in X besteht, die in einer ungeraden Anzahl der Mengen A_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, liegen, das heißt:

$$\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X \mid \operatorname{card}(\{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid x \in A_i\}) \in 2\mathbb{N}+1\},$$

wobei $2\mathbb{N}+1 \coloneqq \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ungeraden Zahlen bezeichne.

Beispiel 6.

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N},\ f(x,y) \coloneqq (x+y)^2 + y,$$

injektiv ist.