Übungsblatt 4B

Beispiel 1.

Sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnungsrelation $\leq$ wohlgeordnet? Falls sie nicht wohlgeordnet sind, geben Sie eine Ordnungsrelation an, bezüglich der $\mathbb{Q}$ wohlgeordnet ist.

Beispiel 2.

Sei X eine Menge und $*\colon X \times X \to X$ eine assoziative innere Verknüpfung, für die

$$x * y = y^2 * x \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Beziehung

$$x^n * y = y^{2^n} * x^n \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt.

Beispiel 3.

Wir definieren auf $\mathbb{Q}$ die innere Verknüpfung

$$*\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x * y := x + y + x^2 y.$$

Bestimmen Sie,

(a) ob die Verknüpfung assoziativ ist,

(b) ob sie kommutativ ist,

(c) ob sie ein neutrales Element besitzt und

(d) welche Elemente $x \in \mathbb{Q}$ ein inverses Element bezüglich $*$ besitzen.

Beispiel 4.

(a) Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller affinen Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vom Grad 1, das heißt,

$$\mathcal{A} := \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q} : f(x) = ax + b\}.$$

Zeigen Sie, daß $(\mathcal{A}, \circ)$ mit der Verkettung $\circ\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ von Funktionen eine Gruppe ist. Ist die Gruppe $(\mathcal{A}, \circ)$ kommutativ?

(b) Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller quadratischer Polynome $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, das heißt,

$$\mathcal{B} := \{g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Q} : g(x) = ax^2 + bx + c\}.$$

Hat $\mathcal{B}$ mit der Verkettung von Funktionen ebenfalls eine Gruppenstruktur?

Beispiel 5.

Geben Sie (bis auf Umbenennung der Elemente) alle möglichen Verknüpfungen $*$ an, die die Menge $\{e, a, b, c, d\}$ zu einer Gruppe machen. Ist eine dabei, die nicht kommutativ ist?

Beispiel 6.

Seien $(H_1, *)$ und $(H_2, *)$ zwei Untergruppen eine Gruppe $(G, *)$. Beweisen Sie, daß $(H_1 \cup H_2, *)$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $H_1 \subset H_2$ oder $H_2 \subset H_1$ gilt.