Übungsblatt 5A

Beispiel 1.

Sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ die symmetrische Gruppe auf X, bestehend aus allen bijektiven Abbildungen $\sigma\colon X \to X$. Es bezeichne $\tau \coloneqq (1\ 2)\colon X \to X$ die Transposition der Zahlen 1 und 2, also $\tau(1) \coloneqq 2$, $\tau(2) \coloneqq 1$ und $\tau(3) \coloneqq 3$.

Zeigen Sie, daß die Teilmenge $\{\mathrm{id}_X, \tau\} \subset \mathfrak{S}_3$ eine zyklische Untergruppe von $(\mathfrak{S}_3, \circ)$, aber kein Normalteiler ist.

Beispiel 2.

Sei $(G, *)$ eine Gruppe, für die die Funktion

$$f\colon G \to G,\ f(g) \coloneqq g^3,$$

ein surjektiver Homomorphismus ist.

Zeigen Sie, daß $(G, *)$ Abel'sch ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß für alle $g, h \in G$ die Beziehung $g^2 * h^2 = (h * g)^2$ und damit $g^4 * h^4 = (g * h)^4$ gilt, woraus Sie die Identität $g * h^3 = h^3 * g$ folgern können.

Beispiel 3.

Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X, versehen mit der symmetrischen Differenz $(A, B) \mapsto A \triangle B$ als Addition und dem Schnitt $(A, B) \mapsto A \cap B$ als Multiplikation, einen kommutativen Ring bildet.

(b) Ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ nullteilerfrei?

Beispiel 4.

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit $R \neq \{0\}$ und $f\colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

Beispiel 5.

Sei F eine Menge mit vier Elementen. Konstruieren Sie Verknüpfungen $+\colon F \times F \to F$ und $\cdot\colon F \times F \to F$ so, daß $(F, +, \cdot)$ ein Körper wird.

Beispiel 6.

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe und $\Phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß

(a) $(R^*, \cdot)$ und $(S^*, \cdot)$ Gruppen sind und

(b) $\Phi|_{R^*}$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(R^*, \cdot)$ und $(S^*, \cdot)$ der Einheiten der Ringe ist.