Übungsblatt 5B

Beispiel 1.

Sei $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ der Ring der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie das kleinste Ideal, das die Teilmenge $\{2, X\} \subset \mathbb{Z}[X]$ enthält. Ist es ein Hauptideal?

Beispiel 2.

Wir betrachten das Polynom $p := X^3 + 2X^2 - 13X + 10$ in $\mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$, mit denen sich das Polynom p in der Form

$$p = (X - a)(X - b)(X - c)$$

schreiben läßt. Dazu bemerken wir, daß p bei 1 eine Nullstelle hat.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{Z}[X]^*$ der Einheiten des Polynomrings $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$.

Beispiel 4.

Zeigen Sie für beliebige $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ folgende Identitäten der Binomialkoeffizienten:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \delta_{n,0}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell - k} = \binom{m+n}{\ell}$.

Beispiel 5.

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $N := \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid i + j + k = n\}$.
Beweisen Sie, daß wir für alle $x, y, z \in R$ die Gleichheit

$$(x + y + z)^n = \sum_{(i,j,k) \in N} \frac{n!}{i!\, j!\, k!} x^i y^j z^k$$

haben.

Beispiel 6.

Bestimmen Sie alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}$, die die Gleichung

$$82m - 144n = 2$$

erfüllen.