Übungsblatt 6A

Beispiel 1.

Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler

(a) $\operatorname{ggT}(15, 2^{445} + 7)$ und

(b) $\operatorname{ggT}(3k + 2, 10k + 6)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 2.

Zeigen Sie, daß

(a) $360 \mid n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ und

(b) $30 \mid (n^5 - n)$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 3.

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

(a) $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$,

(b) $a^2 \equiv b^2 \mod p \;\Rightarrow\; \big(p \mid (a - b)\big) \vee \big(p \mid (a + b)\big)$ und

(c) $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$

gilt.

Beispiel 4.

(a) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Primzahlen p mit

$$p \equiv 2 \mod 3$$

gibt.

(b) Bestimmen Sie alle Primzahldrillinge, das heißt alle Primzahlen p, für die auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind.

Beispiel 5.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß genau dann ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert, das die Kongruenz

$$ax \equiv b \mod n$$

erfüllt, wenn b ein Vielfaches von $\operatorname{ggT}(a, n)$ ist.