Übungsblatt 6B

Beispiel 1.

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Kongruenzsystems

$$\begin{aligned} x &\equiv 6 \mod 7, \\ x &\equiv 9 \mod 12, \\ x &\equiv 11 \mod 25. \end{aligned}$$

Beispiel 2.

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ zwei rationale Zahlen. Zeigen Sie, daß

(a) $x^2 \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{Z}$ und

(b) $(x + y \in \mathbb{Z}) \wedge (xy \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; x, y \in \mathbb{Z}$

gilt.

Beispiel 3.

Wir definieren

- das arithmetische Mittel $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) \coloneqq \frac{1}{2}(x + y)$,
- das geometrische Mittel $G\colon [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $G(x, y) \coloneqq \sqrt{xy}$ und
- das harmonische Mittel $H\colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $H(x, y) \coloneqq \big(A(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})\big)^{-1}$.

Beweisen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Ungleichung

$$H(x, y) \le G(x, y) \le A(x, y).$$

Beispiel 4.

Berechnen Sie das Infimum und das Supremum

(a) der Menge $A \coloneqq \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ und

(b) der Menge $B \coloneqq \big\{ x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x^4 < 4 \big\}$.

Beispiel 5.

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $A + B \coloneqq \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$. Zeigen Sie, daß

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \text{ und } \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

gilt.

(b) Sei D eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen (das heißt Funktionen, deren Bilder beschränkt sind). Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} &\ge \inf\{f(x) \mid x \in D\} + \inf\{g(x) \mid x \in D\} \text{ und} \\ \sup\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} &\le \sup\{f(x) \mid x \in D\} + \sup\{g(x) \mid x \in D\} \end{aligned}$$

ist.