

ÜBUNGSBLATT 7A

Beispiel 1.

(a) Berechnen Sie alle Werte $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|x^2 + x - 2| \geq 2$$

ist.

(b) Bestimmen Sie, ob

$$x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 - 2yz + 4z^2 \geq 0 \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2.

Zeigen Sie, daß die Menge $A := \{q^3 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ordnungsdicht in \mathbb{R} ist (das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $a \in A$ mit $x < a < y$).

Beispiel 3.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = -5 - 12i$.

(b) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $\frac{2+i^n}{(3-i)^3}$.

(c) Berechnen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ den Betrag von $\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}$.

Beispiel 4.

Zeigen Sie, daß keine totale Ordnungsrelation \leq auf \mathbb{C} existiert, für die $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist und die, eingeschränkt auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, mit der Ordnungsrelation von \mathbb{R} übereinstimmt.

Beispiel 5.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge in \mathbb{R} und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von A . Zeigen Sie, daß genau dann eine gegen α konvergierende Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, wenn $\alpha = \inf A$ ist.

Beispiel 6.

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Folge $(\sqrt{x_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{x} konvergiert.

(b) Muß auch die Folge $(\lfloor x_k \rfloor)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\lfloor x \rfloor$ konvergieren?