Übungsblatt 7B

Beispiel 1.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\sqrt{k-1}$,

(b) $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j$ und

(c) $\lim_{k\to\infty}\frac{P(k)}{Q(k)}$,

wobei $(a_j)_{j=1}^\infty$ eine gegen einen Wert $a\in\mathbb{R}$ konvergierende reelle Folge bezeichne und $P\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x):=\sum_{j=0}^{m}p_jx^j$, und $Q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Q(x):=\sum_{j=0}^{n}q_jx^j$, zwei Polynomfunktionen mit $p_m\neq 0$ und $q_n\neq 0$ und $m,n\in\mathbb{N}$ sind.

Beispiel 2.

Sei $(a_j)_{j=1}^\infty$ eine monoton fallende Folge in $[0,\infty)$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{j=1}^\infty a_j$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{\ell=0}^\infty 2^\ell a_{2^\ell}$ konvergiert.

Beispiel 3.

Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie in $\mathbb{C}$, für die die beiden Folgen $(z_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(z_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Familie $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß wenn zusätzlich die Folge $(z_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren muß.

Beispiel 4.

Zeigen Sie, daß die durch

$$x_k:=\sum_{j=1}^{k}\frac{j!}{k!}$$

gegebene Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen 1 konvergiert.

Beispiel 5.

Sei $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ beliebig gewählt. Wir definieren die Menge $\mathcal{A}_p:=\{(a_j)_{j=1}^\infty \mid a_j\in\{0,1,\dots,p-1\}\}$ aller Folgen mit Werten in $\{0,1,\dots,p-1\}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\Phi_p\colon\mathcal{A}_p\to[0,1],\ \Phi_p\big((a_j)_{j=1}^\infty\big):=\sum_{j=1}^\infty a_jp^{-j},$$

surjektiv ist.

(b) Ist Φ_p auch injektiv?

Beispiel 6.

Zeigen Sie, daß $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\mathrm{card}([0,1])$ ist.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe von Beispiel 5 eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $[0,1]$ und eine von $[0,1]$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.