Übungsblatt 8A

Beispiel 1.

(a) Sei $x \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der durch

$$x_k \coloneqq kx - \lfloor kx \rfloor$$

gegebenen Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Wir definieren die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ rekursiv durch

$$z_{k+1} = \frac{z_k}{|z_k|^2} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abhängig vom gewählten Anfangswert $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beispiel 2.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es existiere eine Konstante $C > 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - x_k| \le C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beispiel 3.

Zeigen Sie, daß eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ genau dann gegen einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn x ein Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Beispiel 4.

Bestimmen Sie, welche der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{1+k^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k\sqrt{k}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k}\right)^k$

konvergieren.

Beispiel 5.

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $(0,\infty)$, wobei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiere.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} \ge \frac{\liminf_{k\to\infty} y_k}{\limsup_{k\to\infty} x_k}$$

gilt.

(b) Finden Sie ein Beispiel zweier solcher Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für das

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} > \frac{\liminf_{k\to\infty} y_k}{\limsup_{k\to\infty} x_k}$$

ist.

Beispiel 6.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die der Grenzwert

$$z := \lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

existiert. Zeigen Sie, daß dann

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} = z$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_k - y_\ell - z(x_k - x_\ell)| < \varepsilon(x_k - x_\ell) \text{ für alle } k > \ell \geq N$$

existiert, und betrachten Sie den Grenzwert $k \to \infty$.