Übungsblatt 8B

Beispiel 1.
Sei U der Vektorraum aller Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$V := \{v \in U \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow v(x) \le v(y)\} \text{ und}$$
$$W := \{w \in U \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow w(x) \ge w(y)\}$$

die Teilmengen aller monoton wachsender beziehungsweise monoton fallender Funktionen.
Zeigen Sie, daß die Menge

$$V + W := \{v + w \mid v \in V,\, w \in W\}$$

ein Unterraum von U ist.

Beispiel 2.
Wir betrachten den reellen Vektorraum U aller Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und darin die Teilmengen

$$V := \{v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : v(x) = v(-x)\} \text{ und}$$
$$W := \{w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : w(x) = -w(-x)\}$$

aller geraden beziehungsweise ungeraden Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß V und W Unterräume von U sind und $U = V \oplus W$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Projektion $\pi_V : U \to U$ auf V entlang W und die Projektion $\pi_W : U \to U$ auf W entlang V.

Beispiel 3.
Sei $\ell \subset \mathbb{R}^3$ die durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 0, 0)$ gehende Gerade und $E \subset \mathbb{R}^3$ die senkrecht auf ℓ stehende und durch den Punkt $(1, 1, 1)$ gehende Ebene.

(a) Bestimmen Sie einen Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ und einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$, für die $\ell = \{A + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ gilt.

(b) Finden Sie einen Punkt $B \in \mathbb{R}^3$ und Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, für die $E = \{B + \mu v + \nu w \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ ist.

(c) Finden Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ und einen Wert $a \in \mathbb{R}$, für die die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung

$$\langle n, x\rangle = a$$

gleich E ist.

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$, für die die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung

$$Ax = b$$

gleich ℓ ist.

(e) Berechnen Sie alle Schnittpunkte $\ell \cap E$ von der Gerade ℓ und der Ebene E.

Beispiel 4.
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.

Wir betrachten die Menge $V := \{\sum_{k=0}^{3} a_k X^k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3.

(a) Zeigen Sie, daß V ein Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie weiters, daß die Polynome $1 + X$, X^2, $2X^2 + 3X^3$ linear unabhängige Vektoren in V sind.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in V$, für den die Menge $\{v, 1 + X, X^2, 2X^2 + 3X^3\}$ eine Basis von V ist.

(d) Was ist die Dimension des Vektorraums V?

Beispiel 6.

Sei U ein Vektorraum und $\pi \colon U \to U$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, daß $\pi \circ \pi = \pi$ ist. Zeigen Sie, daß Unterräume V und W von U mit $U = V \oplus W$ existieren, für die π eine Projektion auf V entlang W ist.