Modulprüfung, erster Termin

Name:	
Matrikelnummer:	

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$ definiert.

Bestimmen Sie, ob f injektiv ist und ob f surjektiv ist.

Berechnen Sie zudem das Bild des Intervalls $[-5, 2]$ sowie das Urbild des Intervalls $[-1, 4]$.

(b) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Wir definieren die Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(X)$ dadurch, daß $A \sim B$ genau dann gelte, wenn die symmetrische Differenz $A \triangle B$ leer ist oder endlich viele Elemente besitzt.

Bestimmen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Ungleichungen

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n.$$

(b) Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Partialsummen

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ eine ungerade Zahl $p_n \in 2\mathbb{N}+1$ und eine gerade Zahl $q_n \in 2\mathbb{N}$ existieren, für die

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

ist, und schließen Sie daraus, daß u_n für kein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ eine ganze Zahl ist.

Lösung.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ bildet.

(b) Sei $(R, +, \cdot)$ ein endlicher, kommutativer Ring ohne Nullteiler.
Zeigen Sie, daß für jedes $x \in R\backslash\{0\}$ die Funktion

$$f_x\colon R \to R,\ f_x(y) := x \cdot y,$$

bijektiv ist, und folgern Sie, daß R ein Körper ist.

Lösung.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Finden Sie Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit

$$805\lambda + 273\mu = 7.$$

(b) Seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ zwei endliche, zyklische Gruppen. Wir definieren die Produktgruppe $(G \times H, *_{G\times H})$ auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ mit der durch

$$\forall g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H : (g_1, h_1) *_{G\times H} (g_2, h_2) := (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

gegebenen komponentenweisen Verknüpfung $*_{G\times H}$.

Zeigen Sie, daß $(G \times H, *_{G\times H})$ eine zyklische Gruppe ist, falls

$$\mathrm{ggT}(\mathrm{card}(G), \mathrm{card}(H)) = 1$$

ist.

Lösung.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$|z|^2 + (1 - \mathrm{i})z - (1 - \mathrm{i})\bar{z} = (1 - \mathrm{i})^2.$$

(b) Berechnen Sie das Supremum und das Infimum der Teilmenge

$$K := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in (1, 2) \right\} \subset \mathbb{R}.$$

(Ein Beweis, daß es sich bei den gefundenen Werten in der Tat um das Supremum und das Infimum handelt, wird erwartet.)

Lösung.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie, ob die durch

$$x_k := \sqrt{2k^2+1} - \sqrt{2k^2-1},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

gegebene Folge $(x_k)_{k=1}^\infty$ konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $[0,+\infty)$ mit $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.
Beweisen Sie, daß die Reihe

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{i}^j\, a_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Lösung.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).