Lösungsvorschläge zum zweiten Termin der Modulprüfung

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir definieren auf $\mathbb{C}$ die Relation $\mathcal{R}$ dadurch, daß $w\mathcal{R}z$ genau dann gelte, wenn $\Re\mathrm{e}(w) \leqslant \Re\mathrm{e}(z)$ und $\Im\mathrm{m}(w) \leqslant \Im\mathrm{m}(z)$ ist.

Bestimmen Sie, ob $\mathcal{R}$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ ist und ob $(\mathbb{C}, \mathcal{R})$ total geordnet ist.

(b) Seien X und Y zwei Mengen, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ nicht leere Teilmengen mit $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ und $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ und $f_1\colon A_1 \to B_1$ und $f_2\colon A_2 \to B_2$ zwei bijektive Funktion.

Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, daß dann eine bijektive Funktion $g\colon A_1 \cap A_2 \to B_1 \cap B_2$ existieren muß.

Lösung.

(a)

- *Wir verifizieren die einzelnen Eigenschaften einer Ordnungsrelation:*

  Reflexivität: *Wegen $\Re\mathrm{e}\, w \leqslant \Re\mathrm{e}\, w$ und $\Im\mathrm{m}\, w \leqslant \Im\mathrm{m}\, w$ gilt $w\mathcal{R}w$ für alle $w \in \mathbb{C}$.*

  Transitivität: *Es gelte $w\mathcal{R}z$ und $z\mathcal{R}\zeta$. Dann ist $\Re\mathrm{e}\, w \leqslant \Re\mathrm{e}\, z \leqslant \Re\mathrm{e}\, \zeta$ und $\Im\mathrm{m}\, w \leqslant \Im\mathrm{m}\, z \leqslant \Im\mathrm{m}\, \zeta$, also $w\mathcal{R}\zeta$.*

  Antisymmetrie: *Es gelte $w\mathcal{R}z$ und $z\mathcal{R}w$. Dann haben wir $\Re\mathrm{e}\, w \leqslant \Re\mathrm{e}\, z \leqslant \Re\mathrm{e}\, w$ und $\Im\mathrm{m}\, w \leqslant \Im\mathrm{m}\, z \leqslant \Im\mathrm{m}\, w$, also $\Re\mathrm{e}\, w = \Re\mathrm{e}\, z$ und $\Im\mathrm{m}\, w = \Im\mathrm{m}\, z$ und somit $w = z$.*

  Also ist $\mathcal{R}$ eine Ordnungsrelation.

- *Die Relation ist keine Totalordnung, da etwa die Zahlen 1 und i weder $1\mathcal{R}\mathrm{i}$ noch $\mathrm{i}\mathcal{R}1$ erfüllen.*

(b) *Wir geben ein Gegenbeispiel: $X = \{0,1,2\}$, $Y = \{a,b\}$, $A_1 = \{0,1\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $B_1 = B_2 = \{a,b\}$ und $f_1(0) = a$, $f_1(1) = b$, $f_2(1) = a$, $f_2(2) = b$. Dann ist $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ und $B_1 \cap B_2 = \{a,b\}$. Wegen $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2) = 1 < 2 = \mathrm{card}(B_1 \cap B_2)$ gibt es dann jedoch keine bijektive Abbildung zwischen $A_1 \cap A_2$ und $B_1 \cap B_2$.*

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, daß die Zahl $x^n - y^n$ ein ganzzahliges Vielfaches von $x - y$ ist.

(b) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, +\infty)$, die rekursiv durch die Gleichung

$$x_{k+1} := 2 + \sqrt{x_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

und den Anfangswert $x_0 := 5$ gegeben ist.

Zeigen Sie, daß $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist und $x_k \in (4, 5]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung.

(a) Die Identität

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k},$$

liefert uns, daß

$$x^n - y^n = \lambda(x - y) \text{ mit } \lambda := \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \in \mathbb{Z}$$

gilt.

(b) Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Sei

$$A := \{k \in \mathbb{N} \mid 4 < x_{k+1} < x_k \leqslant 5\}.$$

Wegen $4 < 2 + \sqrt{5} < 5$ haben wir $4 < x_1 < x_0 \leqslant 5$, also $0 \in A$. Angenommen $k \in A$, dann gilt wegen $x_{k+1} > 4$:

$$x_{k+2} - 4 = \sqrt{x_{k+1}} - 2 > 0.$$

Variante 1: Aus $x_{k+1} < x_k \leqslant 5$ folgt weiters, da die Funktion $x \mapsto 2 + \sqrt{x}$ monoton wachsend ist, daß

$$x_{k+2} = 2 + \sqrt{x_{k+1}} < 2 + \sqrt{x_k} = x_{k+1} \leqslant 5$$

ist.

Variante 2: Außerdem haben wir wegen $x_{k+1} > 4$ die Ungleichung

$$x_{k+2} - x_{k+1} = 2 + \sqrt{x_{k+1}} - x_{k+1} = -(\sqrt{x_{k+1}} - 2)(\sqrt{x_{k+1}} + 1) < 0,$$

weshalb $x_{k+2} < x_{k+1} \leqslant 5$ gilt.

Somit ist $4 < x_{k+2} < x_{k+1} \leqslant 5$, also $k + 1 \in A$ und nach vollständiger Induktion daher $A = \mathbb{N}$.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie, ob die Teilmenge $K := \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ des Körpers $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit der komplexen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

(b) Sei G eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ mit der Eigenschaft, daß

$$a := \inf\{g \in G \mid g > 0\} > 0$$

ist. Beweisen Sie, daß

$$G = a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

gilt.

Lösung.

(a) *Offenbar sind* $0, 1 \in K$. *Da außerdem für beliebige* $a + b\mathrm{i}, \alpha + \beta\mathrm{i} \in K$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ *gilt, daß wegen* $a - c, b - d \in \mathbb{Q}$

$$(a + b\mathrm{i}) + (-c - d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i} \in K$$

ist, so haben wir daß $(K, +)$ *eine Untergruppe von* $(\mathbb{C}, +)$ *ist. Außerdem haben wir, daß wegen* $ac - bd, bc + ad \in \mathbb{Q}$

$$(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (bc + ad)\mathrm{i} \in K$$

liegt, weshalb $(K, +, \cdot)$ *ein (automatisch kommutativer) Unterring des Körpers* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist.*
Zudem liegt das inverse Element eines Elements $a+b\mathrm{i} \in K\backslash\{0\}$ *ebenfalls in* K, *da wegen* $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$ *auch*

$$(a + b\mathrm{i})^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i} \in K$$

ist. Damit erfüllt $(K, +, \cdot)$ *alle Eigenschaften eines Körpers.*

(b)

- *Wir zeigen zuerst, daß* $a \in G$ *liegt. Angenommen,* a *wäre nicht in* G, *dann gibt es ein Element* $g \in G$ *mit* $a < g < 2a$ *und weiters ein Element* $\tilde{g} \in G$ *mit* $a < \tilde{g} < g$. *Da* G *eine Untergruppe ist, muß jedoch auch* $g - \tilde{g} \in G$ *sein, was wegen* $0 < g - \tilde{g} < 2a - a = a$ *jedoch ein Widerspruch zu* $a = \inf\{g \in G \mid g > 0\}$ *wäre. Somit ist* $a \in G$.
- *Also ist die von* a *erzeugte Untergruppe, das ist* $a\mathbb{Z}$, *in* G *enthalten. Es bleibt zu zeigen, daß kein weiteres Element* $x \in G\backslash a\mathbb{Z}$ *existiert. Angenommen es gäbe so ein Element* x. *Dann gilt für* $n := \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$, *daß* $na < x < (n + 1)a$ *ist. Da* G *eine Gruppe ist, läge damit jedoch auch* $x - na \in G$, *was wegen* $0 < x - na < a$ *wiederum ein Widerspruch zur Definition von* a *wäre. Somit muß* $G = a\mathbb{Z}$ *sein.*

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$, das durch 4 teilbar ist und die Kongruenzen

$$x \equiv 2 \mod 3$$
$$x \equiv 3 \mod 7$$

erfüllt.

(b) Sei p eine Primzahl, für die auch $8p^2 + 1$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, daß $p = 3$ ist.

Lösung.

(a) Wir bemerken, daß die Zahlen $y_1 := 4 \cdot 7 = 28$ und $y_2 := 3 \cdot 4 = 12$ die Kongruenzen

$$y_1 \equiv 1,\ y_2 \equiv 0 \mod 3,$$
$$y_1 \equiv 0,\ y_2 \equiv 0 \mod 4,$$
$$y_1 \equiv 0,\ y_2 \equiv 5 \mod 7$$

erfüllen. Kombinieren wir diese beiden Werte zu

$$x := 2y_1 + 2y_2 = 80,$$

so haben wir wie verlangt

$$x \equiv 2 \mod 3,$$
$$x \equiv 0 \mod 4 \text{ und}$$
$$x \equiv 10 \equiv 3 \mod 7.$$

(b) Angnommen, p wäre nicht gleich 3. Dann wäre $p \in (3\mathbb{Z} + 1) \cup (3\mathbb{Z} + 2)$ und wegen $(3\mathbb{Z} + 1)^2 = (3\mathbb{Z} + 2)^2 = 3\mathbb{Z} + 1$ daher $p^2 \in (3\mathbb{Z} + 1)$. Somit wäre $8p^2 + 1 \in 3\mathbb{Z}$, was jedoch $3 \mid 8p^2 + 1$ bedeuten würde, weshalb $8p^2 + 1$ in dem Fall keine Primzahl sein könnte. Also bleibt nur noch die Möglichkeit $p = 3$, wo $8p^2 + 1 = 73$ in der Tat eine Primzahl ist.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß $x = y$ genau dann gilt, wenn wir für alle $\varepsilon > 0$

$$|x - y| < \varepsilon$$

haben.

(b) Sei $P \subset \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge der Primzahlen. Zeigen Sie, daß die Polynomfunktion

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \prod_{p \in P} (z^2 - p),$$

keine rationale Nullstelle besitzt.

Lösung.

(a) *‚$\Rightarrow$': Sei $x = y$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ offenbar $|x - y| = 0 < \varepsilon$.*

‚$\Leftarrow$': Angenommen wir haben $|x - y| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, aber $x \neq y$. Dann ist $x - y \neq 0$ und daher $|x - y| > 0$. Insbesondere liefert uns das für $\varepsilon := \frac{1}{2}|x - y|$ den Widerspruch $0 < \varepsilon < |x - y|$.

(b) *Da $\mathbb{C}$ ein Körper und damit nullteilerfrei ist, ist z genau dann einen Nullstelle von f, wenn ein $p \in P$ mit*

$$z^2 = p$$

existiert. Da p eine Primzahl ist, kann jedoch keine rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha^2 = p$ existieren, weil sich jede rationale Zahl als $\alpha = \frac{a}{b}$ mit zwei teilerfremden Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ schreiben läßt und dann $a^2 = pb^2$ gelten müßte. Jedoch müßte dann $p \mid a$ und daher $p^2 \mid a^2$ gelten, woraus aber $p^2 \mid pb^2$, also $p \mid b^2$ und weiters $p \mid b$ folgern würde, was der Teilerfremdheit von a und b widerspräche.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - 2^n}{\alpha^n + 2^n}.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

gilt.

Lösung.

(a)

- Für $|\alpha| > 2$ bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - 2^n}{\alpha^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{2}{\alpha})^n}{1 + (\frac{2}{\alpha})^n} = 1.$$

- Für $\alpha = 2$ haben wir die konstante Nullfolge, also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - 2^n}{\alpha^n + 2^n} = 0.$$

- Für $|\alpha| < 2$ bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - 2^n}{\alpha^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{\alpha}{2})^n - 1}{(\frac{\alpha}{2})^n + 1} = -1.$$

(b) Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - y| < d := \min\{y - \lfloor y \rfloor, \lfloor y \rfloor + 1 - y\} \text{ für alle } n \in [N, \infty)_{\mathbb{N}}.$$

Dann ist

$$\lfloor y \rfloor < y - d < x_n < y + d < \lfloor y \rfloor + 1, \text{ also } x_n \in (\lfloor y \rfloor, \lfloor y \rfloor + 1) \text{ für alle } n \in [N, \infty)_{\mathbb{N}}.$$

Somit ist jedoch

$$\lfloor x_n \rfloor = \lfloor y \rfloor \text{ für alle } n \in [N, \infty)_{\mathbb{N}},$$

weshalb $(\lfloor x_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lfloor y \rfloor$ konvergiert.