Lösungsvorschläge zum dritter Termin der Modulprüfung

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f\colon [2,5] \to [-1,0],\ f(x) := \tfrac{1}{9}(5-x)^2 - 1,\ \text{ und}$$
$$g\colon [-1,0] \to [0,1],\ g(y) := y^4.$$

Zeigen Sie, daß f und g bijektiv sind, und berechnen Sie die inverse Funktion der Komposition $g \circ f$.

(b) Seien X, Y zwei beliebige Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß f genau dann injektiv ist, wenn für alle $A, B \subset X$ die Beziehung

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

gilt.

Lösung.

(a) *Sei $y \in [-1,0]$ beliebig. Dann besitzt die Gleichung $f(x) = y$ wegen $5 - x \geqslant 0$ für alle $x \in [2,5]$ in $[2,5]$ die eindeutige Lösung $x = 5 - 3\sqrt{y+1}$, weshalb f bijektiv ist.*

Ebenso besitzt die Gleichung $g(y) = z$ für alle $z \in [0,1]$ wegen $y \leqslant 0$ in $[-1,0]$ die eindeutige Lösung $y = -\sqrt[4]{z}$, weshalb auch g bijektiv ist.

Für die inverse Funktion $(g \circ f)^{-1}\colon [0,1] \to [2,5]$ der Zusammensetzung $g \circ f$ ergibt sich damit

$$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(-\sqrt[4]{z}) = 5 - 3\sqrt{1 - \sqrt[4]{z}} \text{ für alle } z \in [0,1].$$

(b) *‚$\Rightarrow$': Seien f injektiv und $A, B \subset X$ beliebige Teilmengen.*

- *Dann gilt für jedes Element $y \in f(A \cap B)$ nach Definition, daß ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$ existiert. Damit gilt jedoch auch $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$, also $y \in f(A) \cap f(B)$, womit gezeigt ist, daß $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ist.*
- *Umgekehrt gilt für jedes Element $y \in f(A) \cap f(B)$, daß Elemente $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ mit $y = f(x_1)$ und $y = f(x_2)$ existieren. Wegen der Injektivität von f ist dann aber zwangsläufig $x_1 = x_2 \in A \cap B$, weshalb $y \in f(A \cap B)$ liegt. Damit ist $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.*

Somit ist $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ gezeigt.

‚$\Leftarrow$': Falls f nicht injektiv ist, so finden wir zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Mit $A := \{x_1\}$ und $B := \{x_2\}$ gilt dann jedoch

$$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing \neq \{f(x_1)\} = f(A) \cap f(B).$$

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}$$

erfüllt ist.

(b) Beweisen Sie, daß der Quotient

$$\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} \text{ für alle } k, \ell \in \mathbb{N}$$

eine natürliche Zahl ist.

Lösung.

(a) Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}\}$. Dann ist offenbar $0 \in A$. Außerdem gilt für jedes $n \in A$, daß

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(2(n+1) - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} - 1\right)$$

ist. Beachten wir nun, daß

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \geqslant 4n(n+1) = \left(2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2$$

gilt, so folgt daraus

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n+1},$$

also $n+1 \in A$, woraus sich mit vollständiger Induktion $A = \mathbb{N}$ ergibt.

(b) Wir bemerken, daß mit $n := k + \ell$

$$\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die kleinste positive Zahl p im von der Menge $A := \{546, 9867\}$ erzeugten Ideal (A) des Rings $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $(G, +)$ eine Gruppe mit p Elementen. Beweisen Sie, daß $(G, +)$ eine zyklische Gruppe ist.

Lösung.

(a) *Nach Definition wird das Ideal (A) vom größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen 546 und 9867 erzeugt, weshalb*

$$p = \mathrm{ggT}(546, 9867) = \mathrm{ggT}(546, 18 \cdot 546 + 39) = \mathrm{ggT}(14 \cdot 39, 39) = 39$$

ist.

(b) *Sei $e \in G$ das neutrale Element von G und $g \in G \backslash \{e\}$ ein beliebiges Element.*

Angenommen es gäbe ein $n \in (1, p)_{\mathbb{N}}$ mit $g^n = e$. Dann wäre die Menge $\{g^k \mid k \in [1, n]_{\mathbb{N}}\}$ eine zyklische Untergruppe von G mit n Elementen. Nach dem Satz von Lagrange implizierte das jedoch, daß n ein Teiler von $\mathrm{card}(G) = p$ ist, was jedoch ein Widerspruch dazu wäre, daß p eine Primzahl ist.

Also sind die p Elemente g^k, $k \in [1, p]_{\mathbb{N}}$, paarweise verschieden (da aus $g^k = g^\ell$ mit $k, \ell \in [1, p]_{\mathbb{N}}$ und $k < \ell$ sonst der Widerspruch $g^{\ell - k} = e$ folgte) und damit gilt $G = \{g^k \mid k \in [1, p]_{\mathbb{N}}\}$, womit gezeigt ist, daß G zyklisch ist.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und Primzahlen p die Beziehung

$$(a + b - c)^p \equiv a^p + b^p - c^p \mod p$$

gilt.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $ab = c^2$ und $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie, daß ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a = m^2$ existiert.

Lösung.

(a) **1. Variante:** Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $x^p + p\mathbb{Z} = x + p\mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und daher

$$(a + b - c)^p + p\mathbb{Z} = a + b - c + p\mathbb{Z} = a^p + b^p - c^p + p\mathbb{Z}.$$

2. Variante: Aus den Übungen (Beispiel 3a von Übungsblatt 6A) wissen wir, daß $(x + y)^p + p\mathbb{Z} = x^p + y^p + p\mathbb{Z}$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt. Durch zweimalige Anwendung ergibt sich daraus

$$((a + b) - c)^p + p\mathbb{Z} = (a + b)^p + (-c)^p + p\mathbb{Z} = a^p + b^p + (-c)^p + p\mathbb{Z}.$$

- Ist nun $p = 2$, so gilt

$$((a + b) - c)^2 + 2\mathbb{Z} = a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbb{Z} = a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 + 2\mathbb{Z} = a^2 + b^2 - c^2 + 2\mathbb{Z}.$$

- Ist $p \neq 2$, so ist $p \in 2\mathbb{N} + 1$ ungerade und daher haben wir

$$((a + b) - c)^p + p\mathbb{Z} = a^p + b^p - c^p + p\mathbb{Z},$$

womit die Aussage für alle Primzahlen p gezeigt ist.

(b) Wir definieren $m := \operatorname{ggT}(a, c)$. Dann gilt

$$m^2 = \operatorname{ggT}(a^2, c^2) = \operatorname{ggT}(a^2, ab) = a \operatorname{ggT}(a, b) = a.$$

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Geben Sie jede Nullstelle ζ der Polynomfunktion

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) := (z - \sqrt{2})(z^2 + 2z + \mathrm{i}\sqrt{3}),$$

in der Normalform $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an.

(b) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösung.

(a) *Die erste Nullstelle liegt bei $z_0 = \sqrt{2}$.*
Die beiden anderen Nullstellen sind die Nullstellen der quadratischen Polynomfunktion

$$z^2 + 2z + \mathrm{i} = (z+1)^2 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 1.$$

Seien daher $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a + \mathrm{i}b)^2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Dann ist

$$a^2 - b^2 = 1 \text{ und } 2ab = -\sqrt{3},$$

also

$$b = -\frac{\sqrt{3}}{2a} \text{ und } a^4 - \frac{3}{4} = a^2,$$

was uns die beiden reellen Lösungen

$$a_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},\ b_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

liefert. Damit haben wir die beiden weiteren Nullstellen

$$z_1 = -1 + a_1 + \mathrm{i}b_1 = -\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \text{ und}$$
$$z_2 = -1 + a_2 + \mathrm{i}b_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

(b) *Wäre $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, so folgt aus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, daß $\sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2\sqrt{2}$ nicht rational sein kann. Damit wäre jedoch auch*

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

nicht rational. Also muß $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational sein.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Wir definieren $x_0 := \frac{1}{2}$ und

$$x_{k+1} := (-1)^k x_k^2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie, ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft, daß

$$\forall k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : u_n \leqslant \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

erfüllt ist. Zeigen Sie, daß die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung.

(a) Sei $A := \{k \in \mathbb{N} \mid |x_k| = 2^{-2^k}\}$. Dann ist wegen der Anfangsbedingung $0 \in A$. Und für jedes $k \in A$ gilt, daß

$$|x_{k+1}| = x_k^2 = 2^{-2\cdot 2^k} = 2^{-2^{k+1}}$$

ist. Gemäß vollständiger Induktion ist also $A = \mathbb{N}$ und somit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, daß

$$\lim_{k\to\infty} |x_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2^k}} = 0$$

ist, was bedeutet, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen null konvergiert.

(b) Wir betrachten die Ungleichung für die Wahl $k = 1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Dann ist $\sqrt{n} \leqslant k \leqslant 1 + \sqrt{n}$ und daher

$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor} + \frac{1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Nach dem Einschließungssatz konvergiert die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher gegen null.