Peter Elbau
Gwenael Mercier

Einführung in das mathematische Arbeiten
Fakultät Mathematik

Universität Wien
11. Februar 2022

Modulprüfung, dritter Termin

Name:	
Matrikelnummer:	

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f\colon [2,5] \to [-1,0],\ f(x) := \tfrac{1}{9}(5-x)^2 - 1,\ \text{und}$$
$$g\colon [-1,0] \to [0,1],\ g(y) := y^4.$$

Zeigen Sie, daß f und g bijektiv sind, und berechnen Sie die inverse Funktion der Komposition $g \circ f$.

(b) Seien X, Y zwei beliebige Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß f genau dann injektiv ist, wenn für alle $A, B \subset X$ die Beziehung

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

gilt.

Lösung.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}$$

erfüllt ist.

(b) Beweisen Sie, daß der Quotient

$$\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} \text{ für alle } k, \ell \in \mathbb{N}$$

eine natürliche Zahl ist.

Lösung.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die kleinste positive Zahl p im von der Menge $A \coloneqq \{546, 9867\}$ erzeugten Ideal (A) des Rings $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $(G, +)$ eine Gruppe mit p Elementen. Beweisen Sie, daß $(G, +)$ eine zyklische Gruppe ist.

Lösung.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und Primzahlen p die Beziehung

$$(a + b - c)^p \equiv a^p + b^p - c^p \mod p$$

gilt.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $ab = c^2$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie, daß ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a = m^2$ existiert.

Lösung.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Geben Sie jede Nullstelle ζ der Polynomfunktion

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) := (z - \sqrt{2})(z^2 + 2z + \mathrm{i}\sqrt{3}),$$

in der Normalform $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an.

(b) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösung.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Wir definieren $x_0 \coloneqq \frac{1}{2}$ und

$$x_{k+1} \coloneqq (-1)^k x_k^2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie, ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft, daß

$$\forall k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : u_n \leqslant \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

erfüllt ist. Zeigen Sie, daß die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).