Lösungsvorschläge zum vierten Termin der Modulprüfung

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir definieren auf $(0, +\infty)$ die Relation $\sim$ dadurch, daß $x \sim y$ genau dann gelte, wenn

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $(0, +\infty)$ ist.

(b) Seien X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ zwei Funktionen mit der Eigenschaft, daß $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist. Bestimmen Sie das Bild $(g \circ f)(X)$.

Lösung.

(a) *Die Relation $\sim$ ist klar reflexiv und symmetrisch (das Vertauschen von x und y multipliziert beide Seiten der Gleichung mit -1). Für die Transitivität bemerken wir, daß die Gleichung äquivalent zu*

$$\sqrt{x} - x^4 = \sqrt{y} - y^4$$

ist, was uns unmittelbar die Transitivität liefert.

(b) *Wir beweisen, daß $(g \circ f)(X) = g(Y)$ ist. Die Inklusion $(g \circ f)(X) \subset g(Y)$ folgt direkt aus $f(X) \subset Y$. Sei nun $x \in g(Y)$. Dann existiert ein $y \in Y$ mit $x = g(y)$. Die Verkettung mit f liefert damit $f(x) = (f \circ g)(y) = y$. Verketten wir dies jetzt mit g, so bekommen wir*

$$(g \circ f)(x) = g(y) = x$$

und daher $x \in (g \circ f)(X)$.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$$

gilt.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Lösung.

(a) Für $n = 1$ lautet die Ungleichung $1 \geqslant \frac{1}{2}$ und ist damit erfüllt. Nehmen wir an, daß für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$$

gilt. Dann haben wir

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}.$$

Bemerken wir nun, daß für alle $k \in [2^n, 2^{n+1}-1]_{\mathbb{N}}$ die Abschätzung $\frac{1}{k} \geqslant 2^{-(n+1)}$ gilt, so finden wir

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geqslant 2^n \cdot 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Wir bekommen daher schließlich

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2},$$

woraus wir mit vollständiger Induktion folgern können, daß die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ erfüllt ist.

(b) Für $n = 1$ gilt die Ungleichung. Nehmen wir an, sie gilt für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann haben wir

$$4^{n+1}((n+1)!)^3 = 4^n(n!)^3 \cdot 4(n+1)^3 < 4(n+1)^3 \cdot (n+1)^{3n} = 4(n+1)^{3(n+1)}.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß $4(n+1)^{3(n+1)} \leqslant (n+2)^{3n+3}$ ist, was wiederum äquivalent zu

$$4 \leqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3(n+1)}$$

ist. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes können wir diese Abschätzung direkt verifizieren:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3(n+1)} \geqslant 1 + \binom{3(n+1)}{1} \frac{1}{n+1} = 4.$$

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$G := \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist.

(b) Sei G eine endliche Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen H von G mit der Eigenschaft $\operatorname{card}(H) > \frac{1}{2}\operatorname{card}(G)$.

Lösung.

(a) *Das neutrale Element* 1 *gehört offenbar zu* G*. Zudem ist für* $\frac{1+2m}{1+2n} \in G$ *das inverse Element* $\frac{1+2n}{1+2m}$ *ebenfalls in* G*. Außerdem ist für* $\frac{1+2m}{1+2n}, \frac{1+2\tilde{m}}{1+2\tilde{n}} \in G$ *das Produkt*

$$\frac{1+2m}{1+2n}\frac{1+2\tilde{m}}{1+2\tilde{n}} = \frac{1+2(m+\tilde{m}+2m\tilde{m})}{1+2(n+\tilde{n}+2n\tilde{n})}$$

auch in G*. Somit ist* G *eine Untergruppe von* $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$*.*

(b) *Der Satz von Lagrange liefert uns, daß* $\operatorname{card} H$ *ein Teiler von* $\operatorname{card} G$ *ist. Also existiert ein* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *mit*

$$n \operatorname{card} H = \operatorname{card} G.$$

Da jedoch nach Annahme bereits $2\operatorname{card}(H) > \operatorname{card}(G)$ *ist, bleibt nur die Wahl* $n = 1$*. Daher ist* $H = G$ *die einzige Untergruppe von* G*, die mehr als der Hälfte der Elemente von* G *enthält.*

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$272\lambda + 195\mu = 1.$$

(b) Beweisen Sie für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Implikation

$$c \mid ab \;\Rightarrow\; c \mid \operatorname{ggT}(a, c) \operatorname{ggT}(b, c).$$

Lösung.

(a) Der Euklidische Algorithmus liefert uns die Iteration

$$\begin{aligned}
272 &= 195 + 77, \\
195 &= 2 \cdot 77 + 41, \\
77 &= 41 + 36, \\
41 &= 36 + 5, \\
36 &= 7 \cdot 5 + 1,
\end{aligned}$$

die wie folgt gelesen werden kann:

$$\begin{aligned}
1 &= 36 - 7 \cdot 5 \\
&= 36 - 7(41 - 36) = 8 \cdot 36 - 7 \cdot 41 \\
&= 8(77 - 41) - 7 \cdot 41 = 8 \cdot 77 - 15 \cdot 41 \\
&= 8 \cdot 77 - 15 \cdot (195 - 2 \cdot 77) = 38 \cdot 77 - 15 \cdot 195 \\
&= 38 \cdot (272 - 195) - 15 \cdot 195 = -53 \cdot 195 + 38 \cdot 272.
\end{aligned}$$

Daher ist $\lambda_0 := 38$ und $\mu_0 := -53$ eine Lösung der Gleichung.

Damit können wir die Gleichung in der Form $272(\lambda - \lambda_0) = 195(\mu_0 - \mu)$ schreiben. Und da 272 und 195 gemäß dem Euklidischen Algorithmus teilerfremd sind, muß für jede Lösung $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existieren, für das $(\lambda - \lambda_0) = 195k$ ist. Dann lautet die Gleichung $\mu_0 - \mu = 272k$, so daß jede Lösung von der Form $(\lambda_0, \mu_0) + (195, -272)k$, $k \in \mathbb{Z}$, ist. Umgekehrt gilt jedoch auch $272(\lambda_0 + 195k) + 195(\mu_0 - 272k) = 272\lambda_0 + 195\mu_0 = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so daß die Lösungsmenge gerade $(\lambda_0, \mu_0) + (195, -272)\mathbb{Z}$ ist.

(b) Schreiben wir a und b als Vielfache ihres jeweiligen größten geimeinsamen Teilers mit c, so bekommen wir mit $\tilde{d} := \operatorname{ggT}(a, c)$ und $\hat{d} := \operatorname{ggT}(b, c)$:

$$a = \tilde{a}\tilde{d},\; c = \tilde{c}\tilde{d} \text{ mit } \operatorname{ggT}(\tilde{a}, \tilde{c}) = 1 \text{ und } b = \hat{b}\hat{d},\; c = \hat{c}\hat{d} \text{ mit } \operatorname{ggT}(\hat{b}, \hat{c}) = 1.$$

Wir haben nach Voraussetzung also $c = \tilde{c}\tilde{d} \mid \tilde{a}\hat{b}\tilde{d}\hat{d}$, was uns $\tilde{c} \mid \tilde{a}\hat{b}\hat{d}$ liefert. Das Lemma von Euklid impliziert dann, daß $\tilde{c} \mid \hat{b}\hat{d}$ gilt. Zusammenfassend kriegen wir daher

$$\hat{c}\hat{d} = c = \tilde{c}\tilde{d} \mid \hat{b}\tilde{d}\hat{d},$$

was $\hat{c} \mid \hat{b}\tilde{d}$ impliziert und uns schlußendlich, da $\operatorname{ggT}(\hat{b}, \hat{c}) = 1$ ist, $\hat{c} \mid \tilde{d}$ liefert. Somit haben wir:

$$c = \hat{c}\hat{d} \mid \tilde{d}\hat{d} = \operatorname{ggT}(a, c) \operatorname{ggT}(b, c).$$

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Geben Sie jede Nullstelle ζ der komplexen Polynomfunktion

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P(z) := (2z^2 + \mathrm{i})(z^2 - (4-\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}),$$

in der Normalform $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine zu p teilerfremde Zahl. Zeigen Sie, daß $\sqrt{np}$ irrational ist.

Lösung.

(a) *Das Polynom P ist schon teilweise faktorisiert. Um die Nullstellen von P zu bestimmen, genügt es daher, die Nullstellen von $2z^2 + \mathrm{i}$ sowie $z^2 - (4-\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}$ betrachten.*

- *Zur Berechnung der Nullstellen von $2z^2 + \mathrm{i}$ schreiben wir die Gleichung $2z^2 + \mathrm{i} = 0$ als*

  $$z^2 = -\frac{\mathrm{i}}{2},$$

  was uns mit $z = \alpha + i\beta$ das Gleichungssystem

  $$\alpha^2 - \beta^2 = 0,$$
  $$2\alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

  mit den beiden Lösungen $\alpha = -\beta \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ liefert. Damit haben wir die beiden Nullstellen $-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$ und $\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ gefunden.
- *Für die Bestimmung der Nullstellen von $z^2 - (4-\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}$ berechnen wir die Diskriminante $\delta := (4-\mathrm{i})^2 - 4(5+\mathrm{i}) = -5 - 12\mathrm{i}$. Die Quadratwurzeln von δ in Normalform $\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$ sind Lösungen von*

  $$\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2 = -5,$$
  $$2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -12,$$

  also $\tilde{\alpha} + \mathrm{i}\tilde{\beta} \in \{-2 + 3\mathrm{i}, 2 - 3\mathrm{i}\}$. Die Nullstellen von $z^2 - (4-\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}$ sind daher

  $$\frac{4 - \mathrm{i} - (2 - 3\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} \text{ und } \frac{4 - \mathrm{i} + (2 - 3\mathrm{i})}{2} = 3 - 2\mathrm{i}.$$

(b) *Nehmen wir an, es gäbe Zahlen $s, t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $\sqrt{np} = \frac{s}{t}$ und $\operatorname{ggT}(s,t) = 1$. Dann hätten wir*

$$np = \frac{s^2}{t^2}, \text{ also } t^2np = s^2.$$

Daraus schließen wir, daß $p \mid s^2$ gelten müßte. Da p jedoch eine Primzahl ist, würde $p \mid s$ folgen; wir fänden also ein $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $s = kp$, was uns $t^2np = s^2 = k^2p^2$ lieferte. Daraus würde allerdings $p \mid t^2n$ folgen, weshalb wir, da nach Voraussetzung $\operatorname{ggT}(p,n) = 1$ gilt, $p \mid t^2$, also auch $p \mid t$, hätten, was jedoch der Annahme $\operatorname{ggT}(s,t) = 1$ widerspräche.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid |z| \neq 3\}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha^{-n} + 3^{-n}}{\alpha^{-n} - 3^{-n}}.$$

(b) Bestimmen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ mit } a_n := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{n-1}{3} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

konvergiert.

Lösung.

(a)
- Für $|\alpha| > 3$ bekommen wir
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha^{-n} + 3^{-n}}{\alpha^{-n} - 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(\frac{3}{\alpha})^n + 1}{(\frac{3}{\alpha})^n - 1} = -1.$$
- Für $|\alpha| < 3$, $\alpha \neq 0$, bekommen wir
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha^{-n} + 3^{-n}}{\alpha^{-n} - 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + (\frac{\alpha}{3})^n}{1 - (\frac{\alpha}{3})^n} = 2.$$

(b) Wir bemerken, daß

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \in 3\mathbb{N}\backslash\{0\} - 2, \\ -\frac{1}{3} & \text{für } n \in 3\mathbb{N}\backslash\{0\} - 1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } n \in 3\mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$$

ist. Damit bekommen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{K-1}\left(-\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k}\right) - \frac{1}{3}\frac{1}{3K-1} &= \sum_{n=1}^{3K-1} \frac{a_n}{n} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{3K} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{3K+1} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{K}\left(-\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k}\right). \end{aligned}$$

Da die Reihe $(\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^k b_k)_{\ell=1}^{\infty}$ mit $b_{2k-1} = \frac{1}{3k-1}$ und $b_{2k} = \frac{1}{3k}$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ nach dem Leibnizkriterium gegen einen Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K_0 \in \mathbb{N}$, für das

$$\left|\alpha - \sum_{k=1}^{K}\left(-\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k}\right)\right| < \varepsilon \text{ für alle } K \in [K_0, \infty)_{\mathbb{N}}$$

gilt. Damit haben wir mit $N_0 := \max\{3K_0 + 2, \frac{1}{2\varepsilon}\}$

$$\left|\frac{\alpha}{3} - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ für alle } N \in [N_0, \infty)_{\mathbb{N}}.$$

Somit konvergiert die Reihe gegen $\frac{\alpha}{3}$.