Modulprüfung, vierter Termin

Name:	
Matrikelnummer:	

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 120 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Total	30	

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Wir definieren auf $(0, +\infty)$ die Relation $\sim$ dadurch, daß $x \sim y$ genau dann gelte, wenn

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $(0, +\infty)$ ist.

(b) Seien X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ zwei Funktionen mit der Eigenschaft, daß $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist. Bestimmen Sie das Bild $(g \circ f)(X)$.

Lösung.

Beispiel 2 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$$

gilt.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Lösung.

Beispiel 3 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$G := \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist.

(b) Sei G eine endliche Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen H von G mit der Eigenschaft $\operatorname{card}(H) > \frac{1}{2}\operatorname{card}(G)$.

Lösung.

Beispiel 4 (5 Punkte).

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$272\lambda + 195\mu = 1.$$

(b) Beweisen Sie für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Implikation

$$c \mid ab \;\Rightarrow\; c \mid \operatorname{ggT}(a, c)\operatorname{ggT}(b, c).$$

Lösung.

Beispiel 5 (5 Punkte).

(a) Geben Sie jede Nullstelle ζ der komplexen Polynomfunktion

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P(z) := (2z^2 + \mathrm{i})(z^2 - (4 - \mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}),$$

in der Normalform $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine zu p teilerfremde Zahl. Zeigen Sie, daß $\sqrt{np}$ irrational ist.

Lösung.

Beispiel 6 (5 Punkte).

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mid |z| \neq 3\}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha^{-n} + 3^{-n}}{\alpha^{-n} - 3^{-n}}.$$

(b) Bestimmen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ mit } a_n := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{n-1}{3} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

konvergiert.

Lösung.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).