Übungsblatt 1A

Beispiel 1.

Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(a) „Die Zahl π ist irrational oder transzendent und die Zahl 496 ist entweder eine perfekte Zahl oder ungerade.“

(b) „Wenn sich die zwei Geraden schneiden, dann haben sie genau einen Schnittpunkt.“

Beispiel 2.

Wir nehmen an, die Aussage „Wenn es regnet, nimmt Jana einen Regenschirm mit. Ljoscha nimmt nie einen Regenschirm, wenn es nicht regnet, und immer einen, wenn es regnet.“ trifft zu.

Was können Sie dann jeweils aus den Aussagen

(a) „Jana trägt einen Regenschirm.“,

(b) „Jana trägt keinen Regenschirm.“,

(c) „Ljoscha trägt einen Regenschirm.“,

(d) „Ljoscha trägt keinen Regenschirm.“,

(e) „Es regnet.“ und

(f) „Es regnet nicht.“

schließen?

Beispiel 3.

(a) Wieviele verschiedene dreistellige Junktoren gibt es?

(b) Sei n eine natürliche Zahl. Wieviele n-stellige Junktoren gibt es?

Beispiel 4.

Seien p, q und r Aussagenvariablen. Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils eine Wahrheitstabelle an:

(a) $p \vee ((\neg p) \Leftrightarrow q)$,

(b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$,

(c) $((\neg p) \wedge q) \Rightarrow ((\neg q) \vee (\neg r))$.

Beispiel 5.

Bestimmen Sie, welche der folgenden Aussagen Kontradiktionen sind und welche Tautologien sind:

(a) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$,

(b) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (\neg q)$,

(c) $p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg (q \Rightarrow r))$,

(d) $(p \vee (\neg q) \vee r) \wedge (\neg p) \wedge q$,

(e) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

Beispiel 6.

Drei Personen X, Y und Z treffen zusammen.

- X sagt: „Y sagt die Wahrheit."
- Y sagt: „Z lügt."
- Z sagt: „X und Y sagen beide die Wahrheit oder sie lügen beide."

Gibt es eine mögliche Konstellation, so daß der Wahrheitsgehalt der Aussagen konsistent damit ist, ob die Personen lügen oder die Wahrheit sagen? Bestimmen Sie, welche Personen in diesen Fällen jeweils die Wahrheit sagen und welche lügen.

Übungsblatt 1B

Beispiel 1.

Seien p, q und r drei Aussagenvariablen. Wir definieren die Formel A durch die Wahrheitstabelle

p	wahr	wahr	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch
q	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	falsch
r	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	falsch
A	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	falsch

Schreiben Sie A als Verknüpfung der Aussagen p, q und r

(a) in konjunktiver Normalform und

(b) in disjunktiver Normalform.

Beispiel 2.

Für beliebige Aussagen p und q definieren wir die Exklusion $p \mathbin{\overline{\wedge}} q$ als $\neg(p \wedge q)$.

Zeigen Sie, daß jede aussagenlogische Formel äquivalent zu einer ist, die sich nur mit Hilfe des Junktors $\overline{\wedge}$ schreiben läßt.

Beispiel 3.

Seien p, q, r drei Aussagenvariablen. Bestimmen Sie, welche der vier Formeln

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$,
- $(p \wedge q) \Rightarrow r$,
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$,
- $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

äquivalent zueinander sind.

Beispiel 4.

Beweisen Sie, daß

(a) die beiden Formeln

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \text{ und } p \wedge q; \text{ sowie}$$

(b) die beiden Formeln

$$(\neg p) \Rightarrow (q \vee r) \text{ und } (\neg q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow p)$$

jeweils äquivalent zueinander sind.

Beispiel 5.

Wir haben gesehen, daß $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ gilt. Sei nun n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren p als die Aussage „Die Zahl n ist ungerade.“ und q als die Aussage „Die Zahl n ist eine Primzahl.“. Da nun jedoch entweder $p \Rightarrow q$ oder $q \Rightarrow p$ gilt, folgt entweder, daß jede ungerade Zahl n eine Primzahl ist, oder, daß jede Primzahl n ungerade ist.

Offensichtlich sind jedoch beide Aussagen falsch. Wo ist der Fehler in der Argumentation?

Beispiel 6.

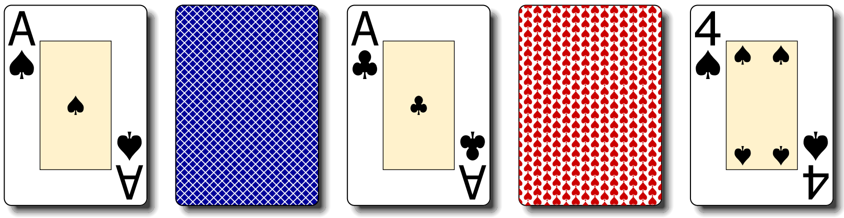
Seine p, q und r Aussagenvariablen. Zeigen Sie, daß

$$p \Rightarrow q, p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vDash p \Rightarrow r$$

gilt; die Formel $p \Rightarrow r$ also wahr ist, wann immer die Formeln $p \Rightarrow q$ und $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ wahr sind.

Übungsblatt 2A

Beispiel 1.
Welche Spielkarten in der untenstehenden Figur muß man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die Frage „Sind alle der fünf Karten, die ein blaues Rautenmuster auf der Rückseite haben, Asse?“ beantworten zu können (wenn wir davon ausgehen, daß jede Spielkarte eine Bild- und eine Rückseite besitzt)?



Beispiel 2.
Geben Sie einen formalen Beweis für den sogenannten Modus tollendo tollens:

$$\neg q, p \Rightarrow q \vdash \neg p.$$

Beispiel 3.
Bringen Sie die aussagenlogische Formel

$$\neg\big((p \Rightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow (s \vee t))\big)$$

(a) in disjunktive Normalform und

(b) in konjunktive Normalform.

Beispiel 4.
Bestimmen Sie die Negation der folgenden prädikatorlogischen Aussagen

(a) „Wenn überall Nacht ist, sind alle Katzen grau.“

(b) „Es gibt genau dann ein Haar in der Suppe, wenn jemand danach sucht.“

Beispiel 5.
Bestimmen Sie die Negation der prädikatorlogischen Formeln

(a) $\forall x\big(P(x) \wedge (\exists y\, Q(x,y))\big)$ und

(b) $\exists x\, \big((\exists y(P(x) \vee Q(x,y))) \Leftrightarrow \forall z R(x,z)\big)$,

wobei P ein einstelliges und Q und R zweistellige Prädikate bezeichnen.

Beispiel 6.
Wir betrachten die prädikatorlogischen Formeln

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \text{ und } \exists y\, \forall x\, P(x,y),$$

wobei P ein zweistelliges Prädikat bezeichnet.

(a) Geben Sie eine Interpretation an, in der die erste Formel wahr und die zweite falsch ist.

(b) Gibt es auch eine Interpretation, in der die erste Formel falsch und die zweite wahr ist?

Übungsblatt 2B

Beispiel 1.
Ist die Implikation

$$A \subset B \cup C \Rightarrow (A \subset B) \vee (A \subset C)$$

für alle Mengen A, B und C richtig?

Beispiel 2.
Sei $E = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ an.

Beispiel 3.
Seien A, B, C drei Mengen mit der Eigenschaft $A \cup B = B \cap C$. Zeigen Sie, daß $A \subset B \subset C$ gilt.

Beispiel 4.
Seien $A, B \subset X$. Beweisen Sie die beiden Identitäten

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ und

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Beispiel 5.
Sei X eine Menge und $\mathfrak{R}$ die durch

$$A \mathfrak{R} B \Leftrightarrow (A = B) \vee (A = X \setminus B)$$

definierte Relation auf $\mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Beispiel 6.
Sei $\mathfrak{R}$ die durch

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow (x^2 + 2)(y + 1) = (y^2 + 2)(x + 1)$$

definierte Relation auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Anzahl Elemente in der Äquivalenzklasse $[x]$.

Übungsblatt 3A

Beispiel 1.

Wir betrachten das Alphabet $A \coloneqq \{a, b, c, \dots, z\}$, versehen mit der üblichen Ordnung $\le$ (das heißt, es gilt $\alpha \le \beta$ genau dann, wenn das Zeichen $\alpha \in A$ früher im Alphabet vorkommt als das Zeichen $\beta \in A$). Wir definieren auf der Menge A^2 der aus zwei Buchstaben bestehenden Worte die lexikographische Ordnungsrelation $\preceq$ dadurch, daß für alle $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \in A$

$$\big((\alpha, \beta) \preceq (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\big) \Leftrightarrow \Big(\big((\alpha \ne \tilde{\alpha}) \wedge (\alpha \le \tilde{\alpha})\big) \vee \big((\alpha = \tilde{\alpha}) \wedge (\beta \le \tilde{\beta})\big)\Big)$$

gelte.

Zeigen Sie, daß $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf A^2 ist und $(A^2, \preceq)$ total geordnet ist.

Beispiel 2.

Seien $\sim_1$ und $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen und $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei Ordnungsrelationen auf einer Menge X. Wir definieren die Relation $\mathfrak{R}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{R}y$ genau dann erfüllt sei, wenn

(a) $(x \sim_1 y) \wedge (x \sim_2 y)$,

(b) $(x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y)$,

(c) $(x\mathcal{R}_1 y) \wedge (x\mathcal{R}_2 y)$,

(d) $(x\mathcal{R}_1 y) \vee (x\mathcal{R}_2 y)$,

(e) $(x \sim_1 y) \wedge (x\mathcal{R}_1 y)$ beziehungsweise

(f) $(x \sim_1 y) \vee (x\mathcal{R}_1 y)$

gilt.

Bestimmen Sie, ob die Relation $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist und ob sie eine Ordnungsrelation ist.

Beispiel 3.

Wir definieren eine strikte Ordnungsrelation $\mathfrak{S}$ auf einer Menge X als eine transitive Relation auf X, die zudem irreflexiv und asymmetrisch ist, das heißt, für kein $x \in X$ sei $x\mathfrak{S}x$ erfüllt und für alle $x, y \in X$ gelte $(x\mathfrak{S}y) \Rightarrow \neg(y\mathfrak{S}x)$.

(a) Sei $\mathfrak{R}$ eine Ordnungsrelation. Wir definieren die Relation $\mathfrak{S}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{S}y$ genau dann gelte, wenn

$$(x\mathfrak{R}y) \wedge (x \ne y)$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}$ eine strikte Ordnungsrelation ist.

(b) Sei umgekehrt $\mathfrak{S}$ eine strikte Ordnungsrelation. Wir definieren die Relation $\mathfrak{R}$ dadurch, daß für alle $x, y \in X$ die Beziehung $x\mathfrak{R}y$ genau dann gelte, wenn

$$(x\mathfrak{S}y) \vee (x = y)$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{R}$ eine Ordnungsrelation ist.

Beispiel 4.

Sei X eine Menge. Wir definieren für eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ die charakteristische Funktion

$$\mathbf{1}_A \colon X \to \{0, 1\},\ \mathbf{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen

(a) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto 1 - \mathbf{1}_A(x)$,

(b) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$, und

(c) $X \to \{0,1\}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$,

für beliebige Teilmengen $A, B \subset X$ ebenfalls charakteristische Funktionen sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Teilmengen.

Beispiel 5.

Seien X, Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß

(a) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ für alle $A \subset X$ und

(b) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ für alle $B \subset Y$

gilt. Geben Sie jeweils ein Beispiel für A beziehungsweise B, für die diese Beziehung eine echte Inklusion ist, oder beweisen Sie, daß immer Gleichheit gilt.

Beispiel 6.

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y, für die es eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in X$$

gibt und zumindest ein $y \in Y$ mit $f(g(y)) \neq y$ existiert.

Kann man ein solches Beispiel auch im Fall, wo $X = Y$ ist, finden?

Übungsblatt 3B

Beispiel 1.

Wir betrachten die durch

(a) $f_1 \colon (-1,1) \to (0,2)$, $f_1(x) \coloneqq \frac{1}{1+x^2}$,

(b) $f_2 \colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f_2(x) \coloneqq \sin(x)$,

(c) $f_3 \colon [-2,2] \to [0,16]$, $f_3(x) \coloneqq x^4$, und

(d) $f_4 \colon [-2,2] \to [-16,16]$, $f_4(x) \coloneqq x^3$,

definierte Funktionen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen injektiv sind, ob sie surjektiv sind, und ob sie bijektiv sind.

Beispiel 2.

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \log\big(1 + (x-1)^2\big).$$

Bestimmen Sie das größte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $-1 \in I$, für das die Einschränkung $f|_I \colon I \to \mathbb{R}$ auf I injektiv ist, und berechnen Sie die inverse Funktion von $f|_I$.

Beispiel 3.

Sei $f \colon X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X und Y.

(a) Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset X$

$$f(A^{\mathrm{c}}) \subset f(A)^{\mathrm{c}}$$

gilt, falls f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset X$

$$f(A)^{\mathrm{c}} \subset f(A^{\mathrm{c}})$$

gilt, falls f surjektiv ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f und einer Teilmenge $A \subset X$, so daß weder

$$f(A^{\mathrm{c}}) \subset f(A)^{\mathrm{c}} \text{ noch } f(A)^{\mathrm{c}} \subset f(A^{\mathrm{c}})$$

gilt.

(Die Komplemente sind dabei stets als Komplemente in X beziehungsweise in Y zu verstehen.)

Beispiel 4.

Für beliebige natürliche Zahlen m, n sei X eine Menge mit n und Y eine Menge mit m Elementen.

(a) Wieviele verschiedene binäre Relationen zwischen X und Y gibt es?

(b) Wieviele verschiedene Funktionen von X nach Y gibt es?

(c) Wieviele verschiedene bijektive Funktionen von X nach Y gibt es?

Beispiel 5.

Seien X und Y zwei Mengen mit der gleichen Kardinalität und $f \colon X \to Y$ sei eine injektive Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f bijektiv ist, falls X endlich viele Elemente enthält.

(b) Muß das auch gelten, wenn X nicht endlich viele Elemente besitzt? Beweisen Sie die entsprechende Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel dafür.

Beispiel 6.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X und Y. Wir definieren die Funktionen

$$f^*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),\ f^*(A) \coloneqq f(A) \text{ und}$$
$$f_*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),\ f_*(B) \coloneqq f^{-1}(B).$$

Zeigen Sie,

(a) daß die Funktion f^* genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist, und

(b) daß f_* genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übungsblatt 4A

Beispiel 1.

Zeigen Sie, daß

(a) eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert und

(b) folgern Sie damit, daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Beispiel 2.

Sei I eine beliebige Indexmenge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{A} := \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in \{0,1\}\}$ aller Familien $(a_i)_{i\in I}$ in $\{0,1\}$. Zeigen Sie, daß die Kardinalität von $\mathcal{A}$ strikt größer ist als diejenige von I.

Beispiel 3.

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Beispiel 4.

Zeigen Sei, daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Ungleichungen

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ und

(b) $\displaystyle\frac{3n}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

erfüllt sind.

Beispiel 5.

Sei X eine Menge. Für eine Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Familie von Teilmengen von X definieren wir die symmetrische Differenz $\triangle_{i=1}^{n} A_i$ der ersten n Mengen A_i rekursiv durch

$$\mathop{\triangle}_{i=1}^{2} A_i := A_1 \triangle A_2 \text{ und } \mathop{\triangle}_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle A_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.$$

Zeigen Sie, daß $\triangle_{i=1}^{n} A_i$ genau aus den Elementen in X besteht, die in einer ungeraden Anzahl der Mengen A_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, liegen, das heißt:

$$\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X \mid \operatorname{card}(\{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid x \in A_i\}) \in 2\mathbb{N}+1\},$$

wobei $2\mathbb{N}+1 := \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ungeraden Zahlen bezeichne.

Beispiel 6.

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N},\ f(x,y) := (x+y)^2 + y,$$

injektiv ist.

Übungsblatt 4B

Beispiel 1.

Sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnungsrelation $\leq$ wohlgeordnet? Falls sie nicht wohlgeordnet sind, geben Sie eine Ordnungsrelation an, bezüglich der $\mathbb{Q}$ wohlgeordnet ist.

Beispiel 2.

Sei X eine Menge und $*\colon X \times X \to X$ eine assoziative innere Verknüpfung, für die

$$x * y = y^2 * x \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Beziehung

$$x^n * y = y^{2^n} * x^n \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt.

Beispiel 3.

Wir definieren auf $\mathbb{Q}$ die innere Verknüpfung

$$*\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x * y := x + y + x^2 y.$$

Bestimmen Sie,

(a) ob die Verknüpfung assoziativ ist,

(b) ob sie kommutativ ist,

(c) ob sie ein neutrales Element besitzt und

(d) welche Elemente $x \in \mathbb{Q}$ ein inverses Element bezüglich $*$ besitzen.

Beispiel 4.

(a) Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller affinen Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vom Grad 1, das heißt,

$$\mathcal{A} := \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q} : f(x) = ax + b\}.$$

Zeigen Sie, daß $(\mathcal{A}, \circ)$ mit der Verkettung $\circ\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ von Funktionen eine Gruppe ist. Ist die Gruppe $(\mathcal{A}, \circ)$ kommutativ?

(b) Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller quadratischer Polynome $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, das heißt,

$$\mathcal{B} := \{g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Q} : g(x) = ax^2 + bx + c\}.$$

Hat $\mathcal{B}$ mit der Verkettung von Funktionen ebenfalls eine Gruppenstruktur?

Beispiel 5.

Geben Sie (bis auf Umbenennung der Elemente) alle möglichen Verknüpfungen $*$ an, die die Menge $\{e, a, b, c, d\}$ zu einer Gruppe machen. Ist eine dabei, die nicht kommutativ ist?

Beispiel 6.

Seien $(H_1, *)$ und $(H_2, *)$ zwei Untergruppen eine Gruppe $(G, *)$. Beweisen Sie, daß $(H_1 \cup H_2, *)$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $H_1 \subset H_2$ oder $H_2 \subset H_1$ gilt.

Übungsblatt 5A

Beispiel 1.

Sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ die symmetrische Gruppe auf X, bestehend aus allen bijektiven Abbildungen $\sigma\colon X \to X$. Es bezeichne $\tau \coloneqq (1\ 2)\colon X \to X$ die Transposition der Zahlen 1 und 2, also $\tau(1) \coloneqq 2$, $\tau(2) \coloneqq 1$ und $\tau(3) \coloneqq 3$.

Zeigen Sie, daß die Teilmenge $\{\mathrm{id}_X, \tau\} \subset \mathfrak{S}_3$ eine zyklische Untergruppe von $(\mathfrak{S}_3, \circ)$, aber kein Normalteiler ist.

Beispiel 2.

Sei $(G, *)$ eine Gruppe, für die die Funktion

$$f\colon G \to G,\ f(g) \coloneqq g^3,$$

ein surjektiver Homomorphismus ist.

Zeigen Sie, daß $(G, *)$ Abel'sch ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß für alle $g, h \in G$ die Beziehung $g^2 * h^2 = (h * g)^2$ und damit $g^4 * h^4 = (g * h)^4$ gilt, woraus Sie die Identität $g * h^3 = h^3 * g$ folgern können.

Beispiel 3.

Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X, versehen mit der symmetrischen Differenz $(A, B) \mapsto A \triangle B$ als Addition und dem Schnitt $(A, B) \mapsto A \cap B$ als Multiplikation, einen kommutativen Ring bildet.

(b) Ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ nullteilerfrei?

Beispiel 4.

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit $R \neq \{0\}$ und $f\colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

Beispiel 5.

Sei F eine Menge mit vier Elementen. Konstruieren Sie Verknüpfungen $+\colon F \times F \to F$ und $\cdot\colon F \times F \to F$ so, daß $(F, +, \cdot)$ ein Körper wird.

Beispiel 6.

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe und $\Phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß

(a) $(R^*, \cdot)$ und $(S^*, \cdot)$ Gruppen sind und

(b) $\Phi|_{R^*}$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(R^*, \cdot)$ und $(S^*, \cdot)$ der Einheiten der Ringe ist.

Übungsblatt 5B

Beispiel 1.

Sei $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ der Ring der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie das kleinste Ideal, das die Teilmenge $\{2, X\} \subset \mathbb{Z}[X]$ enthält. Ist es ein Hauptideal?

Beispiel 2.

Wir betrachten das Polynom $p := X^3 + 2X^2 - 13X + 10$ in $\mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$, mit denen sich das Polynom p in der Form

$$p = (X - a)(X - b)(X - c)$$

schreiben läßt. Dazu bemerken wir, daß p bei 1 eine Nullstelle hat.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{Z}[X]^*$ der Einheiten des Polynomrings $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$.

Beispiel 4.

Zeigen Sie für beliebige $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ folgende Identitäten der Binomialkoeffizienten:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \delta_{n,0}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell - k} = \binom{m+n}{\ell}$.

Beispiel 5.

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $N := \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid i + j + k = n\}$.
Beweisen Sie, daß wir für alle $x, y, z \in R$ die Gleichheit

$$(x + y + z)^n = \sum_{(i,j,k) \in N} \frac{n!}{i!\, j!\, k!} x^i y^j z^k$$

haben.

Beispiel 6.

Bestimmen Sie alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}$, die die Gleichung

$$82m - 144n = 2$$

erfüllen.

Übungsblatt 6A

Beispiel 1.
Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler

(a) $\mathrm{ggT}(15, 2^{445} + 7)$ und

(b) $\mathrm{ggT}(3k + 2, 10k + 6)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 2.
Zeigen Sie, daß

(a) $360 \mid n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ und

(b) $30 \mid (n^5 - n)$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 3.
Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

(a) $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$,

(b) $a^2 \equiv b^2 \mod p \;\Rightarrow\; \big(p \mid (a - b)\big) \vee \big(p \mid (a + b)\big)$ und

(c) $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$

gilt.

Beispiel 4.

(a) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Primzahlen p mit

$$p \equiv 2 \mod 3$$

gibt.

(b) Bestimmen Sie alle Primzahldrillinge, das heißt alle Primzahlen p, für die auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind.

Beispiel 5.
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß genau dann ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert, das die Kongruenz

$$ax \equiv b \mod n$$

erfüllt, wenn b ein Vielfaches von $\mathrm{ggT}(a, n)$ ist.

Übungsblatt 6B

Beispiel 1.

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Kongruenzsystems

$$\begin{aligned} x &\equiv 6 \mod 7, \\ x &\equiv 9 \mod 12, \\ x &\equiv 11 \mod 25. \end{aligned}$$

Beispiel 2.

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ zwei rationale Zahlen. Zeigen Sie, daß

(a) $x^2 \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{Z}$ und

(b) $(x + y \in \mathbb{Z}) \wedge (xy \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; x, y \in \mathbb{Z}$

gilt.

Beispiel 3.

Wir definieren

- das arithmetische Mittel $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) \coloneqq \frac{1}{2}(x + y)$,
- das geometrische Mittel $G\colon [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $G(x, y) \coloneqq \sqrt{xy}$ und
- das harmonische Mittel $H\colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $H(x, y) \coloneqq \big(A(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})\big)^{-1}$.

Beweisen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Ungleichung

$$H(x, y) \le G(x, y) \le A(x, y).$$

Beispiel 4.

Berechnen Sie das Infimum und das Supremum

(a) der Menge $A \coloneqq \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ und

(b) der Menge $B \coloneqq \{ x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x^4 < 4 \}$.

Beispiel 5.

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $A + B \coloneqq \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$. Zeigen Sie, daß

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \text{ und } \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

gilt.

(b) Sei D eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen (das heißt Funktionen, deren Bilder beschränkt sind). Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} &\ge \inf\{f(x) \mid x \in D\} + \inf\{g(x) \mid x \in D\} \text{ und} \\ \sup\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} &\le \sup\{f(x) \mid x \in D\} + \sup\{g(x) \mid x \in D\} \end{aligned}$$

ist.

Übungsblatt 7A

Beispiel 1.

(a) Berechnen Sie alle Werte $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|x^2 + x - 2| \geq 2$$

ist.

(b) Bestimmen Sie, ob

$$x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 - 2yz + 4z^2 \geq 0 \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2.

Zeigen Sie, daß die Menge $A \coloneqq \{q^3 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ordnungsdicht in $\mathbb{R}$ ist (das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $a \in A$ mit $x < a < y$).

Beispiel 3.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = -5 - 12\mathrm{i}$.

(b) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $\frac{2+\mathrm{i}^n}{(3-\mathrm{i})^3}$.

(c) Berechnen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ den Betrag von $\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}$.

Beispiel 4.

Zeigen Sie, daß keine totale Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{C}$ existiert, für die $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist und die, eingeschränkt auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, mit der Ordnungsrelation von $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Beispiel 5.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge in $\mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von A. Zeigen Sie, daß genau dann eine gegen α konvergierende Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, wenn $\alpha = \inf A$ ist.

Beispiel 6.

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Folge $(\sqrt{x_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

(b) Muß auch die Folge $(\lfloor x_k \rfloor)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\lfloor x \rfloor$ konvergieren?

Übungsblatt 7B

Beispiel 1.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\sqrt{k-1}$,

(b) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j$ und

(c) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{P(k)}{Q(k)}$,

wobei $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ eine gegen einen Wert $a\in\mathbb{R}$ konvergierende reelle Folge bezeichne und $P\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x):=\sum_{j=0}^{m}p_jx^j$, und $Q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Q(x):=\sum_{j=0}^{n}q_jx^j$, zwei Polynomfunktionen mit $p_m\neq 0$ und $q_n\neq 0$ und $m,n\in\mathbb{N}$ sind.

Beispiel 2.

Sei $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge in $[0,\infty)$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}a_j$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty}2^{\ell}a_{2^{\ell}}$ konvergiert.

Beispiel 3.

Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie in $\mathbb{C}$, für die die beiden Folgen $(z_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(z_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Familie $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß wenn zusätzlich die Folge $(z_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren muß.

Beispiel 4.

Zeigen Sie, daß die durch

$$x_k:=\sum_{j=1}^{k}\frac{j!}{k!}$$

gegebene Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen 1 konvergiert.

Beispiel 5.

Sei $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ beliebig gewählt. Wir definieren die Menge $\mathcal{A}_p:=\{(a_j)_{j=1}^{\infty}\mid a_j\in\{0,1,\ldots,p-1\}\}$ aller Folgen mit Werten in $\{0,1,\ldots,p-1\}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\Phi_p\colon\mathcal{A}_p\to[0,1],\ \Phi_p\big((a_j)_{j=1}^{\infty}\big):=\sum_{j=1}^{\infty}a_jp^{-j},$$

surjektiv ist.

(b) Ist Φ_p auch injektiv?

Beispiel 6.

Zeigen Sie, daß $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\operatorname{card}([0,1])$ ist.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe von Beispiel 5 eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $[0,1]$ und eine von $[0,1]$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Übungsblatt 8A

Beispiel 1.

(a) Sei $x \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der durch

$$x_k \coloneqq kx - \lfloor kx \rfloor$$

gegebenen Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Wir definieren die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ rekursiv durch

$$z_{k+1} = \frac{z_k}{|z_k|^2} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abhängig vom gewählten Anfangswert $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beispiel 2.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es existiere eine Konstante $C > 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - x_k| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beispiel 3.

Zeigen Sie, daß eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ genau dann gegen einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn x ein Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Beispiel 4.

Bestimmen Sie, welche der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{1+k^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k\sqrt{k}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k}\right)^k$

konvergieren.

Beispiel 5.

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $(0,\infty)$, wobei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiere.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} \geq \frac{\liminf_{k\to\infty} y_k}{\limsup_{k\to\infty} x_k}$$

gilt.

(b) Finden Sie ein Beispiel zweier solcher Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für das

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} > \frac{\liminf_{k\to\infty} y_k}{\limsup_{k\to\infty} x_k}$$

ist.

Beispiel 6.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die der Grenzwert

$$z := \lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

existiert. Zeigen Sie, daß dann

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} = z$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_k - y_\ell - z(x_k - x_\ell)| < \varepsilon(x_k - x_\ell) \text{ für alle } k > \ell \geq N$$

existiert, und betrachten Sie den Grenzwert $k \to \infty$.

Übungsblatt 8B

Beispiel 1.
Sei U der Vektorraum aller Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$V := \{v \in U \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow v(x) \le v(y)\} \text{ und}$$
$$W := \{w \in U \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow w(x) \ge w(y)\}$$

die Teilmengen aller monoton wachsender beziehungsweise monoton fallender Funktionen.
Zeigen Sie, daß die Menge

$$V + W := \{v + w \mid v \in V,\, w \in W\}$$

ein Unterraum von U ist.

Beispiel 2.
Wir betrachten den reellen Vektorraum U aller Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und darin die Teilmengen

$$V := \{v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : v(x) = v(-x)\} \text{ und}$$
$$W := \{w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : w(x) = -w(-x)\}$$

aller geraden beziehungsweise ungeraden Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß V und W Unterräume von U sind und $U = V \oplus W$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Projektion $\pi_V : U \to U$ auf V entlang W und die Projektion $\pi_W : U \to U$ auf W entlang V.

Beispiel 3.
Sei $\ell \subset \mathbb{R}^3$ die durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 0, 0)$ gehende Gerade und $E \subset \mathbb{R}^3$ die senkrecht auf ℓ stehende und durch den Punkt $(1, 1, 1)$ gehende Ebene.

(a) Bestimmen Sie einen Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ und einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$, für die $\ell = \{A + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ gilt.

(b) Finden Sie einen Punkt $B \in \mathbb{R}^3$ und Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, für die $E = \{B + \mu v + \nu w \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ ist.

(c) Finden Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ und einen Wert $a \in \mathbb{R}$, für die die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung

$$\langle n, x\rangle = a$$

gleich E ist.

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$, für die die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung

$$Ax = b$$

gleich ℓ ist.

(e) Berechnen Sie alle Schnittpunkte $\ell \cap E$ von der Gerade ℓ und der Ebene E.

Beispiel 4.
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.

Wir betrachten die Menge $V := \{\sum_{k=0}^{3} a_k X^k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3.

(a) Zeigen Sie, daß V ein Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie weiters, daß die Polynome $1 + X$, X^2, $2X^2 + 3X^3$ linear unabhängige Vektoren in V sind.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in V$, für den die Menge $\{v, 1 + X, X^2, 2X^2 + 3X^3\}$ eine Basis von V ist.

(d) Was ist die Dimension des Vektorraums V?

Beispiel 6.

Sei U ein Vektorraum und $\pi\colon U \to U$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, daß $\pi \circ \pi = \pi$ ist. Zeigen Sie, daß Unterräume V und W von U mit $U = V \oplus W$ existieren, für die π eine Projektion auf V entlang W ist.