Übungsblatt 1

Beispiel 1.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktion $f_n \colon I \to \mathbb{C}$, die punktweise gegen eine Funktion $f \colon I \to \mathbb{C}$ konvergiere.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

gilt, falls die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer solchen (nicht gleichmäßig konvergierenden) Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die Gleichung 1 nicht erfüllt ist.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel Funktionen f_n, deren Integral zwar stets eins ist, deren Träger jedoch immer kleiner wird.

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f_\alpha(x) \coloneqq x^\alpha \sin(x),$$

auf dem Intervall $]0, +\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Beispiel 3.

Sei $f \colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ eine monoton fallende Funktion. Zeigen Sie, daß f genau dann auf $[0, +\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

konvergiert.

Beispiel 4.

Seien $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktionen, T_f das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f um den Punkt x_0, T_g das Taylorpolynom zweiter Ordnung von g um den Punkt $f(x_0)$ und $T_{g\circ f}$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $g \circ f$ um den Punkt x_0.

Zeigen Sie, daß die Koeffizienten der Polynome $T_g \circ T_f$ und $T_{g\circ f}$ bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen, wir also mit geeignet gewählten Koeffizienten $a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$T_g(T_f(x)) = T_{g\circ f}(x) + \sum_{k=3}^{4} a_k (x - x_0)^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

haben.

Beispiel 5.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f \colon]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[\to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \tan\left(\tfrac{\pi}{4}x + (x-1)^2\right),$$

um den Punkt 1.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion

$$g \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ g(x) \coloneqq x^x,$$

um den Punkt 2.

Beispiel 6.
Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \left]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right[\to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \log(x).$$

Bestimmen Sie für gegebenes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die das Taylorpolynom T_n von f um den Punkt 1 der Ordnung n der Abschätzung

$$\sup_{x \in \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$$

genügt.

Beispiel 7.
Zeigen Sie, daß für alle $x \in \left]-1,1\right[$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t$$

gilt und berechnen Sie die Taylorreihe des Arcustangens um den Punkt 0.

Beispiel 8.
Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ g(x) \coloneqq \frac{1}{1-x},$$

um einen beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und geben Sie jeweils den größten Wert $R \in [0, +\infty[$ an, für den die Reihe auf $]a - R, a + R[$ konvergiert und ihr Grenzwert mit g übereinstimmt.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 2

Beispiel 1.

Geben Sie ein Beispiel einer in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht zweimal differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die dennoch Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^2) \text{ für } x \to x_0$$

existieren.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die für $x \neq 0$ durch $f(x) \coloneqq x^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ mit einem geeignet gewählten Parameter $\alpha \in [0, +\infty[$ definierte Funktion f.

Beispiel 2.

Seien $f_1, f_2, g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \,]0, +\infty[$ positive Funktionen mit

$$f_1 = o(g_1) \text{ und } f_2 = o(g_2)$$

im Grenzwert $x \to +\infty$.

Geben Sie für die Behauptungen

(a) $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$,

(b) $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$,

(c) $\mathrm{e}^{f_1} = o(e^{g_1})$ und

(d) $\log(1 + f_1) = o(\log(1 + g_1))$

jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Beispiel 3.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, die asymptotisch gleich sind, das heißt, es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann absolut konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier solcher Folgen, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert.

Beispiel 4.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right|,$$

genau dann eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, wenn A invertierbar ist und $\alpha_i > 0$ für alle $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ gilt.

Beispiel 5.

Seien $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum X. Zeigen Sie, daß die von den beiden Normen erzeugten Topologien $\mathcal{O}_0$ und $\mathcal{O}_1$ gleich sind.

Beispiel 6.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und es bezeichne $\mathrm{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ den offenen und $\bar{\mathrm{B}}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ den abgeschlossene Ball für beliebige $r \in]0, +\infty[$ und $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, daß $\bar{\mathrm{B}}_r(x)$ der Abschluß von $\mathrm{B}_r(x)$ ist, falls X ein normierter Vektorraum und d die von der Norm erzeugte Metrik ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel eines metrischen Raums, in dem Parameter $r \in]0, +\infty[$ und $x \in X$ existieren, für die $\bar{\mathrm{B}}_r(x)$ nicht der Abschluß von $\mathrm{B}_r(x)$ ist.

Beispiel 7.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller offenen, beschränkten, konvexen Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ von 0 mit der Symmetrieeigenschaft, daß für jedes $x \in U$ auch $-x \in U$ ist. Es bezeichne weiters $\mathcal{N}$ die Menge aller Normen auf $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{U},\ \Phi(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nu(x) < 1\},$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Hinweis: Sie können die Inverse von Φ explizit angeben:

$$\Phi^{-1}(U)(x) = \inf\left\{a \in]0, +\infty[\;\middle|\; \tfrac{x}{a} \in U\right\}.$$

Beispiel 8.

Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ der Raum der stetigen Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Supremumsnorm

$$\|\cdot\|_\infty\colon C(I) \to [0, +\infty[,\ \|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

eine Norm auf $C(I)$ ist und $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger normierter Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, daß auch die L^2-Norm

$$\|\cdot\|_2\colon C(I) \to [0, +\infty[,\ \|f\|_2 := \sqrt{\int_I |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$$

eine Norm auf $C(I)$ ist. Ist $(C(I), \|\cdot\|_2)$ ebenfalls vollständig?

(c) Sind die beiden Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ auf $C(I)$ äquivalent zueinander?

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 3

Beispiel 1.

(a) Sei X ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\|\cdot\|\colon X\to\mathbb{R},\ \|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle},$$

eine Norm ist.

(b) Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum der quadratischen Matrizen der Größe $n\times n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, daß

$$\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R},\ \|A\|:=\sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)},$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.

Beispiel 2.

Sei X ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|\colon X\to\mathbb{R}$ eine Norm auf X.

(a) Zeigen Sie, daß genau dann ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{R}$ mit

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle \text{ für alle } x\in X$$

existiert, wenn die Norm die sogenannte Parallelogrammidentität

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \text{ für alle } x,y\in X$$

erfüllt.

Hinweis: Für eine die Parallelogrammidentität erfüllende Norm können Sie das Skalarprodukt durch

$$\langle x,y\rangle:=\tfrac14(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \text{ für alle } x,y\in X$$

definieren. Um die Linearität zu zeigen, genügt es, die Beziehung

$$\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle=\langle x_1+x_2,y\rangle \text{ für alle } x_1,x_2,y\in X$$

herzuleiten. Daraus läßt sich durch ein Stetigkeitsargument ähnlich wie in Beispiel 1 von Übungsblatt 4 der Übungen zu Analysis 1 die Homogenität beweisen.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Norm an, die nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie für jede der Teilmengen

(a) $[0,+\infty[$ in $\mathbb{R}$,

(b) $[0,1[$ in $]-1,1[$,

(c) $\mathbb{N}$ im metrischen Raum $(\mathbb{Z},d|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$,

(d) $\mathbb{Z}$ im metrischen Raum $(\mathbb{Q},d|_{Q\times\mathbb{Q}})$,

(e) $\{\frac1n\mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ in $\mathbb{R}$,

(f) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}]-\frac1n,\frac1n[$ in $\mathbb{R}$,

(g) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}[0,2^{-\frac1n}]$ in $[0,1]$ und

(h) $\bigcap_{\varepsilon\in]0,1[}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n-\varepsilon,n+\varepsilon[$ in $\mathbb{R}$,

ob sie offen und ob sie abgeschlossen ist. Dabei bezeichnet d die vom Abstand in $\mathbb{R}$ induzierte Metrik: $d\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y):=|x-y|$.

Beispiel 4.

Sei X ein reeller, normierter Vektorraum, und sei U eine offene Teilmenge in X. Zeigen Sie, daß die Mengen $\lambda U:=\{\lambda x\mid x\in U\}$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ offen sind.

Beispiel 5.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, und seien A und B zwei nicht leere Teilmengen von X. Für $x \in X$ definieren wir die Distanz von x zu einer Menge $C \subset X$ durch

$$d_C(x) \coloneqq \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Zeigen Sie, daß $d_C \colon X \to [0, +\infty[$ für jede Menge $C \subset X$ wohldefiniert ist, und beweisen Sie die Äquivalenz

$$d_A = d_B \iff \overline{A} = \overline{B}.$$

Beispiel 6.

Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$A \coloneqq \{f \in C([0,1]) \mid \forall x \in [0,1] \colon\ f(x) \neq 0\}$$

des Banachraums $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumsnorm, offen ist, und bestimmen Sie ihren Abschluß $\overline{A}$.

Beispiel 7.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, daß die abgeschlossene Einheitskugel

$$B \coloneqq \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt ist, wenn die Einheitssphäre

$$S \coloneqq \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

kompakt ist.

Beispiel 8.

Wir definieren auf der Menge $\bar{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Topologie $\mathcal{O}$ als die Menge aller Teilmengen $U \subset \bar{\mathbb{C}}$, für die um jeden Punkt $z \in U \cap \mathbb{C}$ ein $\varepsilon \in]0, +\infty[$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(z) \subset U$ existiert, und, falls $\infty \in U$ ist, ein $C \in]0, +\infty[$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > C\} \subset U$ existiert.

(a) Verifizieren Sie, daß $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\bar{\mathbb{C}}$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß der Raum $\bar{\mathbb{C}}$ in dieser Topologie kompakt ist, das heißt, daß jede offene Überdeckung von $\bar{\mathbb{C}}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 4

Beispiel 1.

Seien X und Y zwei metrische (oder topologische) Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß f genau dann stetig ist, wenn die Beziehung

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \text{ für alle Teilmengen } A \subset X$$

gilt.

Beispiel 2.

Seien X und Y zwei normierte Vektorräume und $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(a) Die Funktion f ist stetig auf ganz X;

(b) die Funktion f ist stetig im Punkt $0 \in X$;

(c) es existiert eine Konstante $C > 0$, für die $\|f(x)\| \le C\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt;

(d) die Funktion f ist Lipschitz-stetig.

Beispiel 3.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß f stetig ist.

(b) Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome mit der durch

$$\|\cdot\|\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \quad \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\| \coloneqq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in [0, n]_{\mathbb{N}}$, definierten Norm, und sei $f\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ der Ableitungsoperator $P \mapsto P'$. Zeigen Sie, daß f nicht stetig ist.

Beispiel 4.

Seien X, Y und Z drei normierte Vektorräume und $f\colon X \to Z$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß die Abbildung

$$\|\cdot\|_{X\times Y}\colon X \times Y \to \mathbb{R}, \; \|(x,y)\|_{X\times Y} \coloneqq \big\|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big\|_p,$$

für jede p-Norm $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^2$, $p \in [1, +\infty]$, eine Norm auf $X \times Y$ ist.

(b) Wir definieren die Abbildung

$$\varphi\colon X \times Y \to Z, \; (x,y) \mapsto f(x) + g(y).$$

Zeigen Sie, daß φ genau dann stetig ist, wenn f und g beide stetig sind, wobei wir auf $X \times Y$ die Norm $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ betrachten wollen.

Beispiel 5.

Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt eine Menge $A \subset X$ zusammenhängend, wenn es keine nicht leeren, disjunkten, offenen Mengen U_1 und U_2 in A mit $U_1 \cup U_2 = A$ gibt.

Sei nun $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen X und Y und sei $A \subset X$ eine zusammenhängende Menge. Zeigen Sie, daß $f(A)$ ebenfalls zusammenhängend ist.

Beispiel 6.

Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, kompakte Teilmengen und $f \colon X \to Y$ eine stetige, bijketive Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f ein Homöomorphismus ist.

(b) Beweisen Sie, daß $[0,1]$ und $[0,1]^2$ nicht homöomorph zueinander sind.

Hinweis: Die Menge $[0,1] \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in]0,1[$, ist nicht zusammenhängend.

Beispiel 7.

Sei $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in [0,1]^2 \colon \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_0 \in [0,1]^2$ und

$$f_n \colon [0,1]^2 \to [0,1]^2,\ f_n(x) := f\left(\frac{1}{n}\, x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right).$$

Zeigen Sie, daß f_n einen eindeutigen Fixpunkt x_n in $[0,1]^2$ hat.

(b) Schließen Sie, daß f einen Fixpunkt hat. Muß dieser Fixpunkt eindeutig sein?

Beispiel 8.

Es beschreibe die Funktion $f \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ein (für $\|\alpha\|_\infty > 1$ verzerrtes) „Mise en abyme“, sei also eine Funktion mit der Symmetrieeigenschaft

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} x_1^{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} x_2^{\alpha_2} \end{pmatrix} + a\right) = f(x) \text{ für alle } x \in [0,1]^2$$

für gewisse Parameter $\alpha \in [1, +\infty[^2$, $\lambda \in]0,1[$ und $a \in [0,1]^2$ mit $\|a\|_\infty \leq 1 - \lambda$.

Zeigen Sie, daß es genau einen Punkt $y \in [0,1]^2$ gibt, für den auch die Funktion

$$\tilde{f} \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq y, \\ c & \text{für } x = y, \end{cases}$$

für jeden beliebigen Wert $c \in \mathbb{R}$ diese Symmetrieeigenschaft hat.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 5

Beispiel 1.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } f(0,0) \coloneqq 0$$

definiert.
Bestimmen Sie, ob die Funktion f

(a) stetig,

(b) differenzierbar

ist.

Beispiel 2.
Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ f(x) \coloneqq \frac{1}{\|x\|^\alpha},$$

für jedes $\alpha \in \left]0,+\infty\right[$ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung.

Beispiel 3.
Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{x_2^3}{\sqrt{x_1^2+x_2^4}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Verifizieren Sie, daß f stetig ist und die Funktionen

$$f_v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_v(t) \coloneqq f(vt),$$

für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ differenzierbar sind.

(b) Zeigen Sie, daß f dennoch im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Beispiel 4.
Wir betrachten den Raum $\mathbb{C}^{n\times n}$ aller komplexen Matrizen der Dimension $n \times n$ mit der Operatornorm

$$|||\cdot|||\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R},\ |||A||| \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

wobei $\|\cdot\|\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ bezeichne.

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß $|||\cdot|||$ eine Matrixnorm ist, das heißt, daß sie die Eigenschaft

$$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B||| \text{ für alle } A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

besitzt.

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und es bezeichne R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ in $\mathbb{C}$.
Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k A^k$ für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $|||A||| < R$ konvergiert.

Beispiel 5.

(a) Beweisen Sie, daß für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Operatornorm $|||A||| < 1$ die Matrix $I_{n\times n} - A$ invertierbar ist und stellen Sie $(I_{n\times n} - A)^{-1}$ durch eine Reihe dar. Folgern Sie daraus, daß die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß die durch $f(A) := A^{-1}$ definierte Abbildung $f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ differenzierbar ist, und berechnen sie ihre Fréchet-Ableitung.

Beispiel 6.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist, das heißt, daß $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, daß die Determinante $\det\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Fréchet-Ableitung.

Hinweis: Jede Matrix A läßt sich in der Form $A = TJT^{-1}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ schreiben.

Beispiel 7.

Wir definieren auf dem Raum $\mathbb{C}^{n\times n}$ die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß die Exponentialfunktion wohldefiniert und stetig ist.

(b) Zeigen Sie, daß sie zudem differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung an der Stelle der Identität $I_{n\times n}$.

Beispiel 8.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und

$$T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto T(x_1, x_2, x_3),$$

eine multilineare Abbildung, was bedeute, daß die Abbildungen $x_j \mapsto T(x_1, x_2, x_3)$ für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ und beliebige Werte $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$, linear sind.

Zeigen Sie, daß T Fréchet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von T.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 6

Beispiel 1.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} x \sin \frac{y}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \max\{|x|,|y|\}$,

(d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \min\{x^2,y^2\}$,

stetig sind, ob ihre partiellen Ableitungen existieren und ob diese stetig sind.

Beispiel 2.

Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi''(0) \neq 0$, und sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f stetig aber nicht stetig differenzierbar ist.

Beispiel 3.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) := \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, daß die Funktion φ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung.

Beispiel 4.

Seien $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine positiv homogene, differenzierbare Funktion vom Grad $\alpha \in [1,+\infty[$, das heißt, f habe die Eigenschaft

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in]0,+\infty[.$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$f'(x)x = \alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m$$

gilt.

(b) Beweisen Sie, daß im Fall $\alpha = 1$ die Funktion f linear ist.

Beispiel 5.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine im Nullpunkt differenzierbare Funktion, die wir nur auf dem Bild der Funktion

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (2|t|, \sinh(t)),$$

kennen:

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -|t| \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(0)$ von f im Nullpunkt.

Beispiel 6.

Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ ein $\tau_{x,y} \in \,]0,1[$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(x + \tau_{x,y}(y-x))(y-x)$$

existiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, für die kein Punkt $\tau \in \,]0,1[$ mit

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(\tau)$$

existiert.

(c) Zeigen Sie, daß für jede stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ die Abschätzung

$$\|F(y) - F(x)\| \le \|y - x\| \sup_{\tau \in [0,1]} |||F'(x + \tau(y-x))|||$$

gilt, wobei $|||\cdot|||\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ die Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ bezeichne.

Beispiel 7.

(a) Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $A \subset X$ eine nicht leere, offene und abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, daß $A = X$ ist.

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X \subset \mathbb{R}^m$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in X.$$

Zeigen Sie, daß f auf X konstant ist.

Beispiel 8.

Wir betrachten den Banachraum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm und die Funktion

$$F\colon C([0,1]) \to \mathbb{R},\ F(u) := \int_0^1 |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist und berechnen Sie die Fréchet-Ableitung F' von F; das heißt, finden Sie zu jeder Funktion $u_0 \in C([0,1])$ eine lineare Abbildung $F'(u_0)\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{u \to 0} \frac{F(u_0 + u) - F(u_0) - F'(u_0)u}{\|u\|_\infty} = 0$$

und verifizieren Sie außerdem die (in unendlichdimensionalen Vektorräumen wie $C([0,1])$ zusätzlich für Differenzierbarkeit verlangte) Stetigkeitsbedingung, daß eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|F'(u_0)u| \le C\|u\|_\infty$ für alle $u \in C([0,1])$ existiert.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 7

Beispiel 1.

Seien A und B zwei Teilmengen eines normierten Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$A + B := \{a + b \in X \mid a \in A, b \in B\}$$

offen in X ist, wenn die Menge A offen ist.

(b) Ist $A + B$ abgeschlossen, wenn A und B beides abgeschlossene Mengen sind?

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \frac{\sin(x^3) + \sin(y^3)}{1 + x^2 + y^2},$$

Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 3.

Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2$$

genau dann eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ besitzt, wenn

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

ist.

Beispiel 4.

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung und stellen Sie fest, ob f die Beziehung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

erfüllt.

Beispiel 5.

Sei $X := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen in $\mathbb{R}$, und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf X. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$D\colon X \to X,\ f \mapsto f',$$

nicht stetig ist.

Beispiel 6.

Sei $c \in \,]0,+\infty[$. Wir wollen alle Lösungen $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ der Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \text{ für alle } t,x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

bestimmen.

(a) Zeigen Sie, daß u genau dann eine Lösung von Gleichung 1 ist, wenn die Funktion

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v(\xi,\eta) := u(\tfrac{1}{2c}(\xi+\eta), \tfrac{1}{2}(\xi-\eta)),$$

die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta) = 0 \text{ für alle } \xi,\eta \in \mathbb{R} \tag{2}$$

erfüllt.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Lösungen der Gleichung 2 die Menge aller Funktion $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, für die Funktionen $f,g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ mit

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \text{ für alle } \xi,\eta \in \mathbb{R}$$

existieren, ist.

(c) Folgern Sie, wie die Lösungsmenge der Gleichung 1 aussieht.

Beispiel 7.

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi\colon U \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

die von Kugelkoordinaten auf kartesische Koordinaten umrechnet, wobei wir das Definitionsgebiet auf

$$U := \,]0,+\infty[\,\times\,]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[$$

beschränken.

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß Φ stetig differenzierbar, $\Phi\colon U \to \Phi(U)$ eine bijektive Funktion und ihre inverse Abbildung $\Phi^{-1}\colon \Phi(U) \to \mathbb{R}^3$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

(b) Wir definieren die drei Funktionen

$$\begin{aligned}
e_{\mathrm{r}}\colon U \to \mathbb{R}^3,\ e_{\mathrm{r}}(r,\vartheta,\varphi) &:= \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi)\right\|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi),\\
e_{\vartheta}\colon U \to \mathbb{R}^3,\ e_{\vartheta}(r,\vartheta,\varphi) &:= \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\varphi)\right\|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\varphi) \text{ und}\\
e_{\varphi}\colon U \to \mathbb{R}^3,\ e_{\varphi}(r,\vartheta,\varphi) &:= \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi)\right\|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi).
\end{aligned}$$

Verifizieren Sie, daß die drei Vektoren $e_{\mathrm{r}}(r,\vartheta,\varphi)$, $e_{\vartheta}(r,\vartheta,\varphi)$, $e_{\varphi}(r,\vartheta,\varphi)$ wohldefiniert sind und in jedem Punkt $(r,\vartheta,\varphi) \in U$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(c) Beweisen Sie, daß jede differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für alle $(r,\vartheta,\varphi) \in U$ die Relation

$$\begin{aligned}
\nabla f(\Phi(r,\vartheta,\varphi)) = {} & \frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi)e_{\mathrm{r}}(r,\vartheta,\varphi)\\
& + \frac{1}{r}\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\vartheta}(r,\vartheta,\varphi)e_{\vartheta}(r,\vartheta,\varphi) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\varphi}(r,\vartheta,\varphi)e_{\varphi}(r,\vartheta,\varphi)
\end{aligned}$$

erfüllt.

Beispiel 8.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C}_\mathrm{b}^k(U)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f \in \mathcal{C}^k(U)$, deren Ableitungen $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ beschränkt sind.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k} : \mathcal{C}_\mathrm{b}^k(U) \to \mathbb{R},\ \|f\|_{\mathcal{C}^k} := \sum_{\alpha \in A} \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \right|,$$

wobei $A := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq k\}$ sei, eine Norm auf $\mathcal{C}_\mathrm{b}^k(U)$ und $(\mathcal{C}_\mathrm{b}^k(U), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k})$ ein vollständiger normierter Vektorraum ist.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Problem Set 8

Exercise 1.

Study the extrema of the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \coloneqq e^{x \sin y}$.

Exercise 2.

Let $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ with $f(x,y) \coloneqq xy^2 + \ln(4+y^2)$.

(a) Study the extrema of f in $\mathbb{R}^2$

(b) Study the extrema of f in $[0,1] \times \mathbb{R}$.

Exercise 3.

Let $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ with

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{if } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{if } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

Show that f is continuous in $[0,1]^2$ and determine the supremum $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} f(x,y)$ of f.

Exercise 4.

Let $n \in \mathbb{N}$ with $n \geqslant 2$. Find the global extrema of the function

$$f\colon (0,+\infty)^n \to \mathbb{R},\ f(x_1,\cdots,x_n) \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right).$$

Exercise 5.

Let $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function which satisfies

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \|x-y\|^2 \text{ for all } x,y \in \mathbb{R}^2.$$

Show that f is constant.

Exercise 6.

Let $A \subset \mathbb{R}^2$ be a non-empty, finite set. Find the parameters $a,b \in \mathbb{R}$ such that the distance of these points to the line $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$ is minimal, that is, such that (a,b) is the global minimum of the function

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(a,b) \coloneqq \sum_{(x,y)\in A} \|y - ax - b\|^2.$$

Exercise 7.

Determine if every two-times continuously differentiable function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for which the functions

$$\begin{aligned} &f_y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_y(x) \coloneqq f(x,y), \text{ for every } y \in \mathbb{R} \text{ and} \\ &f^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^x(y) \coloneqq f(x,y), \text{ for every } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

are convex functions is convex.

Exercise 8.

Let $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f\colon]0,1[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x,v) \mapsto f(t,x,v)$ be a two times continuously differentiable function and $\mathcal{J}$ be the functional

$$\mathcal{J}\colon \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^2(]0,1[) \to \mathbb{R},\ \mathcal{J}(u) := \int_0^1 f(t,u(t),u'(t))\,\mathrm{d}t,$$

on the space $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^2(]0,1[)$ of two times differentiable functions whose partial derivatives up to second order are all bounded.

(a) Show that $\mathcal{J}$ is Fréchet differentiable with its derivative given by

$$\mathcal{J}'(u)\tilde{u} = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t),u'(t))\tilde{u}(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(t,u,u'(t))\tilde{u}'(t)\right) \mathrm{d}t \text{ for all } u,\tilde{u} \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^2(]0,1[).$$

(b) Show that every extremal point $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^2(]0,1[)$ of the functional $\mathcal{J}$ fulfils the differential equation

$$P_u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t),u'(t)) \text{ for all } t \in]0,1[,$$

where we defined

$$P_u\colon]0,1[\to \mathbb{R},\ P_u(t) := \frac{\partial f}{\partial v}(t,u(t),u'(t)).$$

Übungsblatt 9

Beispiel 1.
Zeigen Sie, einmal durch direktes Einsetzen in die Definition und einmal über die Charakterisierung mittels der Hesse-Matrix (Definition 4.3 und Theorem 4.4 in den Vorlesungsnotizen), daß die Funktion $g(x_1, x_2) \coloneqq 3x_1(x_1 - 1) + 4\pi x_2^2$ konvex auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Beispiel 2.
Bestimmen Sie die Hesse-Matrix der Funktion $f(x, y, z) \coloneqq \frac{xyz}{2z-x^2}$ und berechnen Sie die gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z}$ der Funktion $g(x, y, z) \coloneqq 2000x^{15} \cos^3(e^{x^2+z^2}) - xy^3 \sin z + \frac{y-z}{x^2+1}$.

Beispiel 3.
Bestimmen Sie alle globalen Extremalstellen der Funktion $f(x, y) \coloneqq x^2 - 3xy + y^2$ im Quadrat $[1, 3] \times [0, 2]$.

Beispiel 4.
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $h \coloneqq f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel. Dabei seien die Funktionen $f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ und $g \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(\xi, \nu, \zeta) \coloneqq \begin{pmatrix} \zeta \cos(\xi - \nu) \\ \frac{\nu}{\zeta} \end{pmatrix}, \qquad g(x, y) \coloneqq \begin{pmatrix} x^{x+y} \\ \ln(y^2 + 1) \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

gegeben. Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Jacobi-Matrix der Funktion h direkt berechnen.

Beispiel 5.
Berechnen Sie alle Extremalstellen der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ f(x, y, w, z) \coloneqq 2\cos(z) - 3x^2 + xy - y^2 - 2w^2 + xw,$$

und bestimmen Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Beispiel 6.
Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2).$$

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß die Funktionen

$$g_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_v(t) \coloneqq f(vt),$$

für alle Richtungen $v \in \mathbb{S}^1$ ein lokales Minimum in 0 haben.

(b) Zeigen Sie, daß f dennoch kein lokales Minimum in 0 hat.

Beispiel 7.
Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

gilt, falls f eine konvexe Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, daß darüber hinaus

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq y$$

erfüllt ist, falls f strikt konvex ist.

Beispiel 8.

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.

(a) Sei $x \in C$ und $y \in \mathring{C}$. Beweisen Sie, daß $x + \lambda(y - x) \in \mathring{C}$ ist für alle $\lambda \in]0, 1[$.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathring{C}$ und $\overline{C}$ beides konvexe Mengen sind.

(c) Zeigen Sie weiters, daß der Abschluß von C und der von $\mathring{C}$ übereinstimmen, falls das Innere $\mathring{C}$ von C nicht leer ist: $\overline{C} = \overline{\mathring{C}}$.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Gwenael Mercier
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Problem Set 10

Exercise 1.

Expand the function $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ into a Taylor polynomial of second order around an arbitrary point $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Calculate it explicitly for the choice $\bar{x} = (1, 1, 1)$.

Exercise 2.

For $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := y \sinh(xy)$ determine the Taylor polynomial of second order at the point $(0, 1)$.

Exercise 3.

Expand the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \cos(xy^2)$ in $(0, 0)$ into a Taylor polynomial of first order and estimate the Taylor remainder for $x, y \in [-0.1, 0.1]$ as well as possible without the use of a calculator.

Exercise 4.

Approximate $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ with a maximum error of 10^{-5} by means of a Taylor polynomial of $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Exercise 5.

Let $X \subset \mathbb{R}^m$ be an open set and $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ be k times differentiable functions. Show that the function

$$h\colon X \to \mathbb{R},\ h(x) := \langle f(x), g(x)\rangle,$$

is also k times differentiable and that we have for every multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^m$ with $|\alpha| \le k$ the general Leibniz rule

$$\partial^\alpha h = \sum_{\beta \in A_\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \langle \partial^\beta f, \partial^{\alpha-\beta} g\rangle \text{ with } \binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^m \binom{\alpha_i}{\beta_i},$$

where $A_\alpha := \{\beta \in \mathbb{N}^m \mid \forall i \in [1, m]_{\mathbb{N}}\colon \beta_i \le \alpha_i\}$.

Exercise 6.

We are looking for an approximation of the function

$$f\colon]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \exp\left(-\frac{1}{x_1x_2}\right) \arctan(x_1),$$

for large values of x_1 and x_2 by a polynomial in the (small) variables $\frac{1}{x_1}$ and $\frac{1}{x_2}$. For this, determine the coefficients $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in A_2 := \{\alpha \in \mathbb{N}^2 \mid |\alpha| \le 2\}$, such that we have

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A_2} a_\alpha \frac{1}{x^\alpha} + o(\tfrac{1}{x_1^2} + \tfrac{1}{x_2^2}),$$

in the limit $x_1, x_2 \to +\infty$.

Exercise 7.

Show that we have for all $x \in \mathbb{R}^2$ with $\|x\| \le \frac{1}{2}$ the estimate

$$|\ln\big((1 + x_1)(1 + x_2)\big) - (x_1 + x_2)| \le 2\|x\|^2.$$

Exercise 8.
Let $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ be a differentiable function and define the corresponding function

$$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ F(x+\mathrm{i}y) \coloneqq f(x,y),$$

in the complex plane. We introduce the two operators ∂_z and $\partial_{\bar{z}}$ by

$$(\partial_z F)(x+\mathrm{i}y) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \text{ and } (\partial_{\bar{z}} F)(x+\mathrm{i}y) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Show that we have for every $k+1$ times continuously differentiable function f the relation

$$F(z) = \sum_{\alpha \in A_k} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}(\partial_z^{\alpha_1}\partial_{\bar{z}}^{\alpha_2}F)(0)z^{\alpha_1}\bar{z}^{\alpha_2} + o(|z|^k),$$

where $A_k \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{N}^2 \mid |\alpha| \le k\}$.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Ekaterina Sherina
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Problem Set 11

Exercise 1.

Show that the system of equations

$$a^2e + b^3de - ade^2 - 1 = bcd,$$
$$ab^2d^2 + c^3e - be^3 = 9$$

can be locally resolved at the point $(a, b, c, d, e) = (2, 1, 2, 1, 1)$ with respect to the variables d and e. Also, calculate $\frac{\partial d}{\partial a}$ and $\frac{\partial e}{\partial c}$ at the point $(a, b, c) = (2, 1, 2)$.

Exercise 2.

Show that the system of equations

$$F(t, x, y) \coloneqq \begin{pmatrix} 3x^3 + 2y^5 - 5t^7 \\ 2x^3 - y^5 - t^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

can be locally uniquely resolved at the point $(t, x, y) = (0, 0, 0)$ with respect to the variables x, y, even though in this point the implicit function theorem is not applicable.

Exercise 3.

Let $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be defined by $f(x, y, z) \coloneqq (2e^{4x}\sin(7y), 5e^{4x}\cos(7y), z^4)$. In which points is f locally invertible? Determine also $(f^{-1})'(f(0, \frac{\pi}{28}, 3))$.

Exercise 4.

Using the theory of Lagrange functions, determine the global extrema of the function $f(x, y) \coloneqq 7 - 24xy - 10y^2$ on the circle area $\Omega \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 13\}$.

Exercise 5.

Using the theory of Lagrange multipliers, determine the minimum distance of the point $P \coloneqq (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ to the surface $S \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2\}$.

Exercise 6.

Let $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a two times continuously differentiable function. A critical point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ of f is called non-degenerate if the Hessian H_f of f is invertible at the position x_0: $\det(H_f(x_0)) \ne 0$.

Show that non-degenerate critical points of f are isolated (that is, there exists an open neighbourhood around each of them which does not contain any other critical point).

Exercise 7.

Let $F\colon \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ be a continuously differentiable, strictly convex function with $F(0) = 0$.

Show that there exists for every $C \in \,]0, +\infty[$ a continuous, bijective function $\gamma\colon [0, 2\pi[\, \to F^{-1}(\{C\})$ which is continuously differentiable on $]0, 2\pi[$, and that the vectors $\nabla F(\gamma(\varphi))$ and $\gamma'(\varphi)$ are for every $t \in \,]0, 2\pi[$ perpendicular to each other.

Exercise 8.

Let $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) \coloneqq \langle v, x\rangle$ for some vector $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Find the global maximum and global minimum of f on the set

$$\Omega \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \le 1,\ x_3 \ge 0\}.$$

Problem Set 12

Exercise 1.

Show that the function $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ defined by $f(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ is a local C^1-diffeomorphism in all points.

Exercise 2.

Show that the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by $f(x,y) := (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ is a C^1-diffeomorphism on $\mathbb{R}^2$.

Exercise 3.

Show that the following functions are immersions and determine if their images are submanifolds:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) := (\cos(2x), \sin(2x), x)$,

(b) $\psi\colon\ ]1,\infty[\ \to \mathbb{R}^2$, $\psi(y) := \left(\frac{y+1}{2y}\cos(2y), \frac{y+1}{2y}\sin(2y)\right)$.

Exercise 4.

Let $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a smooth function. Show that the graph $\mathcal{G}_F$ of F is a regular submanifold of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ by explicitly specifying for every point on $\mathcal{G}_F$ a parametrisation.

Exercise 5.

Give for each of the following problems either a proof or a counterexample:

(a) Let $U \subset \mathbb{R}^m$ be an open set and $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ be an injective immersion. Is then $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ a submanifold of $\mathbb{R}^n$?

(b) Let $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ be two submanifolds of $\mathbb{R}^n$. Is then also their intersection $M_1 \cap M_2$ a submanifold of $\mathbb{R}^n$?

(c) Let $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ be two disjoint submanifolds of $\mathbb{R}^n$. Is then their union $M_1 \cup M_2$ a submanifold of $\mathbb{R}^n$?

(d) Let $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ and $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ be two submanifolds. Is then their direct product $M_1 \times M_2$ a submanifold of $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$?

Exercise 6.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in [0,n]_{\mathbb{N}}$, be continuously differentiable functions, and consider the polynomials

$$P_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ P_x(y) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x) y^k.$$

Show that if $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ is a pair with

$$P_{x_0}(y_0) = 0 \text{ and } P'_{x_0}(y_0) \neq 0,$$

then there exist open neighbourhoods $U \subset \mathbb{R}$ of x_0 and $V \subset \mathbb{R}$ of y_0 and a continuously differentiable function $z\colon U \to V$ such that $z(x)$ is for every $x \in U$ the only root of P_x in V.

Exercise 7.

Determine all submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with codimension 0.

Exercise 8.

Let M_1 and M_2 be two submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with the dimensions m_1 and m_2. Show that we have $m_1 = m_2$ if there exists a diffeomorphism $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ with $\Phi(M_1) = M_2$.

Problem Set 13

Exercise 1.

Let $a, b, c > 0$. For $I \coloneqq [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ compute the integral

$$\int_I \sqrt[3]{x}\sqrt{y}z^2 \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

using Riemann sums.

Exercise 2.

Compute the integral

$$\int_{[1,2]\times[2,3]} \left(x^3y + xy\ln(y^6)\right) \,\mathrm{d}(x,y).$$

Exercise 3.

Compute the integral

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[2,3]} \frac{e^{4x}}{(y+z)^5} \,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Exercise 4.

Using cylindrical coordinates to compute the volume of

$$A \coloneqq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 9 \text{ and } 0 \le 3z \le 12 - 8x\right\}.$$

Exercise 5.

Calculate the volume of the intersection $B \cap C$ of the unit ball $B \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le 1\}$ and the cone $C \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 3x_3^2,\ x_3 \ge 0\}$.

Exercise 6.

(a) Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function with $\lim_{|x|\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Show that

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi)f(r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

(b) Calculate the value of the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercise 7.

We consider for $n \in \mathbb{N}$ the n-dimensional simplex

$$\Delta^n \coloneqq \left\{x \in [0,1]^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i \le 1\right\}.$$

(a) Determine the volume $|\Delta^n| \coloneqq \int_{\Delta^n} \mathrm{d}x$ of the simplex.

(b) Calculate the integral

$$\int_{\Delta^n} \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n x_i}\,\mathrm{d}x.$$

Exercise 8.

We consider the function

$$f\colon \bar{\mathrm{B}}_1(0) \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(x_1 x_2)}{x_1^2+x_2^2} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

on the closed unit ball $\bar{\mathrm{B}}_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Show that the iterated integrals

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1 \text{ and } \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

exist and give the same value.

(b) Show that f is nevertheless not Riemann-integrable.

Zur Verfügung gestellt von:
Peter Elbau und Ekaterina Sherina
UE Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!