

Übungen Stochastik für das Lehramt

Wintersemester 2022

1. Seien $A = \{1, 2, \dots, k\}$ und $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Wie viele Funktionen mit der Definitionsmenge A und der Zielmenge B gibt es?
2. Seien $A = \{1, 2, \dots, k\}$ und $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Wie viele injektive Funktionen mit der Definitionsmenge A und der Zielmenge B gibt es? Wie viele bijektive Funktionen mit der Definitionsmenge A und der Zielmenge B gibt es?
3. In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und mit jeweils drei Farbtönen eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?
4. Morsezeichen werden aus den Elementarzeichen „·“ und „–“ gebildet. Wie viele Zeichen lassen sich insgesamt darstellen, wenn ein Zeichen durch eine Folge von 1 bis 5 Elementarzeichen verschlüsselt wird?
5. Zur Linderung der Energiekrise soll schnellstmöglich eine Gaspipeline in der Länge von 300 km errichtet werden. Die geeigneten Stahlrohre von 20 m Länge können von fünf verschiedenen Herstellern geliefert werden, jedoch jeweils nur im Umfang von 100 km und mit leicht abweichenden Durchmessern $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5$. Dementsprechend sollen drei Hersteller ausgewählt werden, dann soll bei der Verlegung die Zahl an Nahtstellen mit abweichenden Durchmessern minimal gehalten werden. Wie viele mögliche Anordnungen von Rohrtypen gibt es insgesamt? Wie viele mögliche Anordnungen von Rohrtypen gibt es, wenn jeweils nur Rohre mit gleichen oder unmittelbar benachbarten Durchmessern verschweißt werden dürfen?
6. Wieder soll eine Gaspipeline in der Länge von 300 km aus Stahlrohren von 20 m Länge errichtet werden. Diesmal sind die drei Rohrdurchmesser $d_1 < d_2 < d_3$ vorgegeben, wobei Durchmesser d_1 zu je 50 km von zwei Herstellern geliefert wird, Durchmesser d_2 zu je 25 km von vier weiteren Herstellern und Durchmesser d_3 zu je 20 km von fünf weiteren Herstellern. Nun sollen sowohl Nahtstellen von verschiedenen Durchmessern als auch Nahtstellen von verschiedenen Herstellern vermieden werden. Wie viele mögliche Anordnungen von Rohrtypen gibt es insgesamt? Wie viele mögliche Anordnungen von Rohrtypen gibt es, wenn jeweils nur Rohre mit gleichen oder unmittelbar benachbarten Durchmessern verschweißt werden dürfen?
7. Wie viele Sitzordnungen (d.h. welche*r Schüler*in auf welchem Platz sitzt) gibt es in einer Klasse mit 19 Schülern, wenn 24 Plätze zur Verfügung stehen? Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn nur eine der 12 Bänke einfach besetzt sein darf?
8. Fünf Personen unternehmen eine Autofahrt in einem Motorboot mit insgesamt sechs Sitzplätzen, von diesen Personen besitzen zwei eine Lenkerberechtigung. Nach dem Schifffahrtsgesetz darf das Motorboot unter Aufsicht einer Person mit Lenkerberechtigung auch von einer Person ohne Lenkerberechtigung gelenkt werden. In diesem Fall nehmen wir an, dass die Person mit Lenkerberechtigung auf dem Sitz neben dem Fahrersitz Platz nimmt. Auf wie viele Arten können die Personen im Boot Platz nehmen?
9. Aus den Zeichen des Wortes ANTI-GESICHTSVERHÜLLUNGSGESETZ sind Zeichenketten zu bilden, die dem Muster FFP-MASKE hinsichtlich der Verwendung von Vokalen, Konsonanten und Bindestrich entsprechen, als auch hinsichtlich von Wiederholungen (d.h. zu Beginn zweimalig derselbe Konsonant, welcher auch im langen Ausgangswort zumindest zweimalig vorkommt; dann ein neuer Konsonant; dann der Bindestrich; dann ein neuer Konsonant; dann ein Vokal u.s.w.). Wie viele dieser Zeichenketten gibt es?
10. Am Nachmittag eine Mathematiker*innentagung sollen sechs Vorträge stattfinden, davon nehmen zwei Vorträge Bezug auf einen (gemeinsamen) Vortrag und sollen daher nach diesem stattfinden. Wie viele Varianten der Tagungsplanung gibt es an diesem Nachmittag? Wie viele Varianten gibt es, wenn die drei genannten Vorträge unmittelbar aufeinander folgen sollen?
11. Wie viele nicht-leere Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ gibt es, die gleich viele gerade und ungerade Zahlen enthalten?

12. Beim Gewinnspiel Euromillions werden zufällig fünf Gewinnzahlen aus den Zahlen 1 bis 50 sowie zwei Sternzahlen aus den Zahlen 1 bis 12 gezogen.
 - (i) Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es?
 - (ii) Jemand hat die Gewinnzahlen 3, 9, 26, 37, 43 und die Sternzahlen 3 und 7 getippt. Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es, die vier dieser Gewinnzahlen enthalten, aber nicht alle fünf, sowie eine von zwei Sternzahlen, aber nicht beide.
13. Wir betrachten wieder das Gewinnspiel Euromillions. Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es jeweils, die den folgenden Bedingungen entsprechen?
 - (i) Alle Gewinnzahlen sind gerade und alle Sternzahlen sind Primzahlen.
 - (ii) Alle Gewinnzahlen sind Primzahlen und alle Sternzahlen sind gerade.
14. Wir betrachten ein weiteres Mal das Gewinnspiel Euromillions. Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es jeweils, die den folgenden Bedingungen entsprechen?
 - (i) Alle Gewinnzahlen sind kleiner als 35.
 - (ii) Genau drei Gewinnzahlen sind größer als 35.

Die Sternzahlen sind in beiden Fällen beliebig.
15. Ein Verein besteht aus 50 Personen, die Geschlechtsangaben bei den Anmeldungen lauteten auf weiblich in 22 Fällen, männlich in 21 Fällen, divers in 6 Fällen und offen in einem Fall. Nun soll ein Wahlvorschlag für einen Ausschuss von 9 Personen erstellt werden, die Geschlechtsangaben sollen auf weiblich in 4 Fällen, auf männlich in 3 Fällen und auf divers in 2 Fällen lauten. Wie viele mögliche Zusammensetzungen des Wahlvorschlags gibt es?
16. Aus den Zeichen a, b, c, d, 2, 3, 4, 5, 6 sollen Folgen, die aus drei Ziffern und drei Buchstaben bestehen, gebildet werden. Wie viele gibt es, wenn jedes dieser Zeichen nur einmal verwendet wird? Wie viele gibt es, wenn jedes dieser Zeichen beliebig oft verwendet werden darf?
17. Aus 20 Schüler*innen sollen 4 Teams gebildet werden, wobei jedes Team aus 5 Schüler*innen besteht. Auf wie viele Arten ist das möglich?
18. Ein Würfel wird 25 Mal hintereinander geworfen. Wie viele Folgen von Augenzahlen gibt es, die 5 Mal 1, 4 Mal 2, 6 Mal 3, 2 Mal 4, 3 Mal 5 und 5 Mal 6 enthalten?
19. Eine Person hat in ihrem Zimmer 8 Lampenfassungen und dazu 8 LED-Lampen, von denen je zwei in den Farben weiß, rot, grün und blau leuchten.
 - (i) Wie viele verschiedene Beleuchtungen gibt es?
 - (ii) Wie viele gibt es, wenn die Tischlampe nicht rot leuchten soll?
20. Ein Internetdienstleister betreibt drei Rechenzentren und möchte dort für drei Kundenfirmen Server installieren. Für jede Kundenfirma sollen jeweils vier Server installiert werden, wobei in jedem Rechenzentrum vier Plätze verfügbar sind.
 - (i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese zwölf unterscheidbaren Server den drei Rechenzentren zuzuordnen?
 - (ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jede Kundenfirma zumindest einen Server in jedem Rechenzentrum haben soll?
21. Wie viele 9-stellige, durch 2 teilbare Zahlen (ohne führende Nullen) lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 0, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 8 bilden?
22. Wie viele 9-stellige, durch 3 teilbare Zahlen (ohne führende Nullen) lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 0, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 8 bilden? (Hinweis: Ziffernsumme)
23. Seien E , F und G Ereignisse, das sind Teilmengen einer Ergebnismenge Ω . Mit Hilfe von E , F , G und \cap , \cup , $'$ beschreibe man:

(i) höchstens eines tritt ein	(ii) genau zwei treten ein
(iii) alle drei treten ein	(iv) genau eines tritt ein
24. Wie groß ist beim Schnapsen (20 Karten in vier Farben) die Wahrscheinlichkeit, dass ein*e bestimmte*r Spieler*in
 - (i) alle 5 Karten einer Farbe erhält?
 - (ii) alle 4 Asse erhält?

25. Bei der Lottoziehung 6 aus 45 tritt an der Lottomaschine eine Fehlfunktion auf. Dadurch werden fortwährend Kugeln gezogen, sodass schließlich auch die Zahlen 1, 2 und 3 alle gezogen sind. Innerhalb des Programmrasters findet jedoch nur die Ziehung von 12 Kugeln Zeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die als letzte gezogene der Zahlen 1, 2 und 3 nach der Sendung gezogen?
26. Wir betrachten nun die Ziehung des Jokers beim Lotto, d.h. einer sechsstelligen Zahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Ziehung der k -ten Ziffer erstmalig eine bereits gezogene Ziffer auftritt?
27. In einer Urne sind 5 rote, 3 blaue und 4 grüne Kugeln. Man zieht eine 3-elementige Teilmenge.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Farben zu ziehen?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei verschiedene Farben zu ziehen?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedene Farben zu ziehen?
28. In einer Urne sind 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln hintereinander mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
- ist genau eine der Kugeln schwarz? (ii) wird keine weiße Kugel gezogen?
 - treten drei verschiedene Farben auf? (iv) ist die zweite Kugel rot, die andern aber nicht?
29. Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten werden zufällig fünf Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau drei Herzkarten und zwei Könige sind?
30. Peter und Paul sind für die Stundenwiederholung in Mathematik nicht vorbereitet. Sie wissen, dass der Lehrer zufällig 2 Schüler*innen aus den 23 anwesenden Schülern*innen auswählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- sowohl Peter als auch Paul drankommen? (ii) Peter, aber nicht Paul drankommt?
 - Paul drankommt? (iv) weder Peter noch Paul drankommen?
31. Zur Förderung der Rechenkompetenz der Österreicher*innen soll ein neues Lotteriespiel eingeführt werden. Bei diesem Spiel sind sieben nichtnegative ganze Zahlen unter Beachtung der Reihenfolge zu tippen, wobei deren Summe 39 ergeben muss und Wiederholungen zulässig sind. Zu berechnen ist die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Tipps unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Ergebnisse.
32. Nun soll für das eben beschriebene Spiel eine praktisch umsetzbare Ziehungsmethode entwickelt werden. Zu diskutieren ist die Methode „ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen vom Umfang 39 aus der Menge der Kugeln 1 bis 7“. Falls diese Ziehungsmethode als ungeeignet erkannt wird, soll eine geeignete Alternative angegeben werden.
33. Die Bewegungsgleichung einer Stahlkugel im freien Fall innerhalb eines Schachts beziehungsweise darüber lautet $z(t) = -5t^2 + at + b$. Das Paar (a, b) der Parameter a (Geschwindigkeit bei $t = 0$) und b (Höhe über der Erdoberfläche bei $t = 0$) wird zufällig (gleichverteilt) gewählt
- im Quadrat $[-1, 1] \times [-2, 0]$.
 - im Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0, -1)$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt die Stahlkugel jeweils für zumindest eine Zeit $t \in \mathbb{R}$ über die Erdoberfläche?
34. Ein Paar von Winkeln (α, β) werde zufällig (gleichverteilt) im Rechteck $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ gewählt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihr Abstand als reelle Zahlen kleiner als $\pi/6$?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihr Abstand als Winkel (d.h. als Elemente von $\mathbb{R} \bmod 2\pi$) kleiner als $\pi/6$?
35. Ein Punkt s wird zufällig im Intervall $[0, 1/2]$ gewählt und ein Punkt t wird unabhängig und zufällig im Intervall $[1/2, 1]$ gewählt, d.h. das Paar (s, t) wird zufällig (gleichverteilt) im Rechteck $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$ gewählt. Dadurch wird das Intervall $[0, 1]$ in 3 Teile geteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die Längen der drei Teilintervalle die Seiten eines Dreiecks?
36. Eine Betonwand ist mit einem von außen nicht sichtbaren Gitter aus Stahldraht bewehrt, von Drahtmitte zu Drahtmitte gemessen bildet das Gitter Rechtecke mit der Seitenlänge von 150 mm horizontal und 250 mm vertikal. Die Dicke der horizontalen Drähte beträgt 6 mm, die Dicke der vertikalen Drähte beträgt 7 mm. An einer zufällig gewählten Stelle wird mit einem Bohrer von 10 mm Durchmesser ein Loch in die Wand gebohrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Gitter getroffen?

37. In Urne A sind 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. In Urne B sind 2 schwarze und 5 weiße Kugeln. Man zieht aus jeder Urne eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu erhalten?
38. Jemand gibt bei jeder Runde Euromillionen einen Tipp ab. Wie viele Runden wären erforderlich, um mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0,50$ mindestens einen ersten Gewinnrang (alle Gewinnzahlen und alle Sternzahlen richtig getippt) zu erzielen?
39. Beim Aufeinandertreffen zweier Tennisspielerinnen sei die jeweilige Wahrscheinlichkeit des Satzgewinns mit 0,60 zu 0,40 gegeben, wobei alle Sätze eines Matches voneinander unabhängig entschieden werden. Zu ermitteln ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Matches mit zwei Sätzen unter der Bedingung, dass
- die erste Spielerin das Match gewinnt.
 - die zweite Spielerin das Match gewinnt.
40. Beim Aufeinandertreffen zweier Tennisspieler auf drei Gewinnsätze sei die jeweilige Wahrscheinlichkeit des Satzgewinns mit 0,60 zu 0,40 gegeben, wobei alle Sätze eines Matches voneinander unabhängig entschieden werden. Zu ermitteln ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Matchgewinns für die beiden Spieler unter der Bedingung, dass das Match
- über drei Sätze gespielt wird.
 - über fünf Sätze gespielt wird.
41. Beim Aufeinandertreffen zweier Tennisspieler*innen sei die jeweilige Wahrscheinlichkeit des Matchgewinns mit $\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{3}$ gegeben. Wir nehmen an, dass alle Sätze unabhängig und mit denselben Wahrscheinlichkeiten entschieden werden. Zu ermitteln ist jeweils die Wahrscheinlichkeit des Satzgewinns, wenn
- das Match auf zwei Gewinnsätze gespielt wird.
 - das Match auf drei Gewinnsätze gespielt wird.
42. Aus einem Kartenstapel wird zufällig gezogen, bis eine \heartsuit -Karte gezogen wird. Zu Beginn besteht der Stapel aus einer \heartsuit -Karte und zwei \clubsuit -Karten. Jedes Mal, wenn eine \clubsuit -Karte gezogen wird, wird sie und noch eine weitere \clubsuit -Karte zurückgelegt, wobei der Vorrat von \clubsuit -Karten unbegrenzt sei. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man n Züge benötigt, bis die \heartsuit -Karte gezogen wird.
43. Gegeben sind vier Würfel jeweils mit den Augenzahlen 004444, 333333, 222266 und 111555. Die Spieler*innen A und B spielen folgendes Spiel: Spieler*in A wählt einen Würfel. Dann wählt Spieler*in B einen der übrigen Würfel. Wer die größere Augenzahl wirft hat gewonnen. Zeige: Bei geeigneter Wahl des Würfels durch Spieler*in B gewinnt diese*r mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.
44. Wir analysieren die Lottoziehungen „6 aus 45“ so lange, bis zum n -ten Mal nur Zahlen bis 40 gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das bei der k -ten Ziehung passiert?
45. Urne I enthält 5 rote und 3 grüne Kugeln. Urne II enthält 3 rote und 4 grüne Kugeln. Eine Urne wird zufällig gewählt und zwei Kugeln daraus gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
- zwei Kugeln gleicher Farbe zu ziehen?
 - eine rote und eine grüne Kugel zu ziehen.
46. In einem Sack befindet sich eine große Zahl von Nüssen, geliefert von den Firmen A, B und C mit zahlenmäßigen Anteilen von 30%, 50% und 20%. Nüsse des Lieferanten A sind mit Wahrscheinlichkeit 0,05 ranzig, jene des Lieferanten B mit Wahrscheinlichkeit 0,1 und jene von C mit Wahrscheinlichkeit 0,08. Die Nuss, die ich zufällig aus dem Sack gezogen habe, ist nicht ranzig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde sie von A, B bzw. C geliefert?
47. Zur Erkennung von COVID-19 wird ein Test verwendet, der bei 95% der infektiösen Personen diesen Umstand auch feststellt. Allerdings ist der Test bei 2% der nicht infektiösen Personen ebenfalls positiv. Man weiß auch dass 0,7% der Bevölkerung infektiös sind. Bei einer Person ist dieser Test positiv. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie tatsächlich infektiös?
48. An einem Straßenstück, an dem festgestellt wurde, dass 20% der Autos zu schnell fahren, wird ein Radarmessgerät aufgestellt. Dieses Gerät erkennt ein zu schnell fahrendes Auto mit Wahrscheinlichkeit 0,98. Jedoch wird mit Wahrscheinlichkeit 0,01 ein nicht zu schnell fahrendes Auto irrtümlich als zu schnell gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine verfügte Strafe unbegründet ist?

49. Wir werfen zwei Würfel und definieren eine Zufallsvariable X durch den Betrag der Differenz der beiden Augenzahlen. Man gebe den Wahrscheinlichkeitsvektor dieser Zufallsvariablen an und skizziere deren Verteilungsfunktion.

50. Wieder werfen wir zwei Würfel. Nun sei X die Anzahl verschiedener Primzahlen in der Faktorisierung des Produkts der beiden Augenzahlen. Man gebe den Wahrscheinlichkeitsvektor dieser Zufallsvariablen an und skizziere deren Verteilungsfunktion.

51. Sei

$$w(k) = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Man zeige, dass $(w(k))_{k \geq 1}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist und skizziere die zugehörige Verteilungsfunktion für $t \in [-1, 6]$.

52. Sei nun

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2}{(k+1)(k+2)} & \text{für } k = 1, \dots, 12 \\ \frac{1}{98} \left(\frac{13}{14}\right)^{k-13} & \text{für } k = 13, 14, \dots \end{cases}$$

Man zeige, dass $(w(k))_{k \geq 1}$ ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist.

53. Wir modifizieren nun den Vorgang aus Beispiel 42. Nun wird nach der Ziehung einer ♣-Karte diese zurückgelegt und dann die Anzahl der ♣-Karten im Stapel verdoppelt. Wir erhalten den Ausdruck

$$w(k) = \left\{ \prod_{l=1}^{k-1} \frac{2^l}{2^l + 1} \right\} \frac{1}{2^k + 1} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

für die Wahrscheinlichkeit, bei der k -ten Ziehung die ♡-Karte zu ziehen. Es ist festzustellen, ob der Ausdruck $(w(k))_{k \geq 1}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist.

54. Ein Punkt wird zufällig (gleichverteilt) innerhalb des Einheitskreises in \mathbb{R}^2 gewählt. Die Zufallsvariable X sei sein Abstand vom Rand des Einheitskreises. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und skizziere diese sowie die Verteilungsfunktion von X .

55. Ein Punkt wird zufällig (gleichverteilt) innerhalb des Einheitskreises in \mathbb{R}^2 gewählt. Die Zufallsvariable X sei die erste Koordinate des Punktes. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und skizziere diese sowie die Verteilungsfunktion von X .

56. Zwei Punkte x, y werden zufällig (gleichverteilt) und unabhängig in $[0, 1]$ gewählt, d.h. das Paar (x, y) ist zufällig (gleichverteilt) im Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$. Sei X das Abstandsquadrat der beiden Punkte. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und skizziere diese sowie die Verteilungsfunktion von X .

57. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Zu beweisen ist folgende Formel für den Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

(Hinweis: Darstellung des Ausdrucks als doppelte Reihe und Umordnung der Indices.)

58. Sei X eine $G(p)$ -verteilte Zufallsvariable mit $p \in (0, 1)$, d.h. eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in der Menge $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ und dem Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(k) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Zu berechnen ist der Erwartungswert $E(X)$ mit der Formel aus Beispiel 57.

59. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in der Menge $\{2, 3, 4, \dots\}$ und dem Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(k) = \frac{4}{(k-1)k(k+1)} \quad \text{für } k = 2, 3, 4, \dots$$

Zu berechnen ist der Erwartungswert $E(X)$. (Hinweis: Rechengang ähnlich Beispiel 51)

60. Sei nun

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16}{x^4} & \text{für } x > 2 \\ \exp(3x - 6) & \text{für } x \leq 2. \end{cases}$$

Es ist zu zeigen, dass es sich bei f um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt. Weiters sind der Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ einer Zufallsvariablen X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f zu bestimmen.

61. Ein*e Schüler*in hat einen Wortschatz von 70% aller zu erlernenden Vokabeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig gewählten Vokabeln
- (i) mindestens 6 gekannt werden? (ii) mindestens 9 gekannt werden?
62. Ein gewöhnlicher Würfel wird 10 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6
- (i) genau 3 Mal auftritt? (ii) genau 8 Mal auftritt?
 (iii) weniger als 4 Mal auftritt? (iv) mindestens 7 Mal auftritt?
63. Nach langjähriger Erfahrung erscheinen bei einer Fluggesellschaft 5% aller Passagiere mit gebuchtem Ticket nicht zum Check-In. Die Fluggesellschaft überbucht den Flug, d.h. verkauft eine größere Zahl an Tickets für 167 verfügbare Plätze in der Economy Class. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Überbuchung niemand zurückbleiben muss, wenn die Fluggesellschaft
- (i) 170 Tickets verkauft? (ii) 172 Tickets verkauft?
 (Anmerkung: Bei diesem Beispiel ist die Genauigkeit eines einfachen Taschenrechners unzureichend.)
64. Wir wählen zufällig und gleichwahrscheinlich eine von zwei Münzen aus. Von diesen Münzen ist eine fair, während die andere Münze bei jedem Wurf „Wappen“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,48 und „Zahl“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,52 ergibt. Wir werfen die gewählte Münze hundert Mal, dabei erhalten wir „Wappen“ bei 40 Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die faire Münze ausgewählt wurde? (Anmerkung: Auch hier ist die Genauigkeit eines einfachen Taschenrechners unzureichend.)
65. Zu berechnen ist die Varianz $V(X)$ einer $G(p)$ -verteilten Zufallsvariablen X . (Hinweis: Die bei der Berechnung des Erwartungswerts verwendete Potenzreihe ist ein weiteres Mal gliedweise zu differenzieren, der dabei auftretende Term der Form $i(i-1)$ kann zur Darstellung von i^2 verwendet werden wie bei der Berechnung der Varianz einer $B(n, p)$ -verteilten Zufallsvariable.)
66. Die Anzahl der Unfälle, die sich auf einer bestimmten Baustelle in einem Zeitraum von t Wochen ereignen, sei Poisson-verteilt mit dem Parameter $t/10$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb eines Jahres (52 Wochen) mehr als 12 Unfälle ereignen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem halben Jahr kein Unfall ereignet?
67. Die Verteilung der Mobilfunk-Basisstationen (aka „Handymasten“) in Wien sei zufällig entsprechend einem Poisson-Punktprozess mit einer durchschnittlichen Dichte von $5/\text{km}^2$. Somit ist die Anzahl der Stationen, die sich in einer beliebigen Fläche von $x \text{ km}^2$ befinden, Poisson-verteilt mit dem Parameter $x \cdot 5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Umkreis von 500 m höchstens 2 Stationen befinden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich im ersten Bezirk mit einer Fläche von $2,87 \text{ km}^2$ gar keine Station befindet?
68. Die Lebensdauer X einer LED-Lampe (in Stunden) sei $E(\lambda)$ -verteilt. Man hat getestet, dass diese Type von LED-Lampen 50000 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0,9 überlebt. Gesucht ist λ .
69. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LED-Lampe aus dem letzten Beispiel 100000 Stunden überlebt? Wie viele Stunden überlebt sie mit Wahrscheinlichkeit 0,95?
70. Die Lebensdauer eines Fernsehgerätes in Jahren sei $E(1/7)$ -verteilt. Die Herstellerfirma stellt das Gerät zum Preis von EUR 2.000 her, verkauft es um EUR n und zahlt den Betrag zurück, wenn das Gerät innerhalb von zwei Jahren versagt. Wie ist n zu wählen, damit der Erwartungswert des Gewinnes EUR 500 beträgt?
71. Eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$, wobei $\lambda \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, heißt Erlang-verteilt mit dem Parameter λ und n Freiheitsgraden. (Im Fall $n = 1$ erhalten wir die Exponentialverteilung mit Parameter λ .) Zu berechnen sind Erwartungswert und Varianz von X .

72. In einem Callcenter treffen pro Stunde durchschnittlich 50 Anrufe ein, wobei die Bearbeitung eines Anrufs 5 Minuten dauert. Zu Beginn einer Schicht um 09:00 werden 6 Mitarbeiter*innen neu eingesetzt, während die Mitarbeiter*innen der vorangehenden Schicht nur noch ihre bereits begonnenen Anrufe erledigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 09:00 und 09:05 zumindest ein Anruf in die Warteschleife gelangt?
73. In einer Abfüllanlage werden Zementsäcke befüllt, der Inhalt der Säcke sei $N(\mu, \sigma)$ -verteilt mit $\mu = 25$ kg und $\sigma = 0,25$ kg.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sack die vertraglich garantierte Mindestfüllmenge von 24,5 kg unterschreitet?
 - Welche garantierte Mindestfüllmenge ist zu vereinbaren, wenn höchstens 1% der Säcke diese Menge unterschreiten dürfen?
 - Auf welchen Erwartungswert μ muss man die Abfüllanlage einstellen, wenn die Mindestfüllmenge von 24,5 kg nur von 1% der Säcke unterschritten werden darf?
74. Nun sollen Zementsäcke mit dem Nenninhalt von 25 kg befüllt werden, sodass bei höchstens 10% aller Säcke der Inhalt mehr als 25,5 kg beträgt und von höchstens 1% der Säcke die garantierte Mindestfüllmenge von 24,5 kg unterschritten wird. Wie genau muss die Abfüllanlage arbeiten, das heißt wie groß darf die Standardabweichung σ der normalverteilten Sackinhalte höchstens sein, damit beides möglich ist?
75. Eine Maschine wird zum Abfüllen von Mehlpackungen mit einer Nennfüllmenge von 1000 g verwendet. Der Inhalt der Packungen ist $N(\mu, \sigma)$ -verteilt mit $\mu = 1010$ g und $\sigma = 10$ g. Bei einer Überprüfung wird aus einem Los von 2500 Packungen eine Stichprobe von 50 Packungen gezogen. Nach den gesetzlichen Vorschriften ist die „zulässige Minusabweichung“ 15 g, daher wird eine Packung in der Stichprobe als fehlerhaft angesehen, wenn der Inhalt weniger als 985 g beträgt. Die Stichprobe wird angenommen, wenn sich darin höchstens zwei fehlerhafte Packungen befinden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Stichprobe?
76. Nun wird die gleiche Maschine zum Abfüllen von Mehlpackungen mit einer Nennfüllmenge von 500 g verwendet. Der Inhalt der Packungen ist nun $N(\mu, \sigma)$ -verteilt mit $\mu = 505$ g und $\sigma = 10$ g. Wieder wird aus einem Los von 2500 Packungen eine Stichprobe von 50 Packungen gezogen, die „zulässige Minusabweichung“ ist aufgrund der gesetzlichen Bestimmungen ebenfalls 15 g. Die Stichprobe wird angenommen, wenn sich darin höchstens zwei fehlerhafte Packungen befinden. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Stichprobe?
77. Eine Papiermaschine erzeugt Blätter, wovon 90% eine Dicke zwischen 0,26 und 0,34 mm aufweisen. Wie groß ist die Standardabweichung σ der Dicke der von dieser Maschine erzeugten Papierblätter, wenn man davon ausgeht, dass die Blattdicke normalverteilt ist und die oben genannten Intervallgrenzen symmetrisch um den Erwartungswert μ liegen?
78. Eine Firma produziert LED-Lampen mit einem Ausschussanteil von 1,5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Palette von 5000 Glühbirnen mehr als 70 defekte Glühbirnen sind? Welche Maximalanzahl von defekten Glühbirnen kann in einer Palette von 5000 Glühbirnen mit zumindest 95% Wahrscheinlichkeit garantiert werden?
79. Im Zuge einer Konsumentenbefragung werden Fragebögen an Konsument*innen ausgeschickt. Derzeit werden durchschnittlich nur noch 35% der Fragebögen ausgefüllt und zurückgeschickt. Wie viele Fragebögen müssen ausgeschickt werden, damit man mit zumindest 90% Wahrscheinlichkeit 400 Fragebögen zurückerhält?
80. Zu bestimmen ist die mindeste Zahl von Würfeln einer fairen Münze, sodass die relative Häufigkeit des Auftretens von „Wappen“ mit zumindest 99,9% Wahrscheinlichkeit um höchstens $0,001$ von $\frac{1}{2}$ abweicht.
81. Ein Prüfungstest enthält eine ungerade Zahl von Fragen, zu denen jeweils vier Antworten vorgegeben sind, wobei bei jeder Frage genau eine Antwort korrekt ist. Einen positiven Prüfungsabschluss erreicht, wer mehr als die Hälfte der Fragen richtig angekreuzt hat. Wie viele Fragen müssen gestellt werden, damit jemand bei rein zufälligem Ankreuzen mit zumindest 99% Wahrscheinlichkeit negativ beurteilt wird?

82. Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2 + cy^2 + 2xy & \text{für } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (i) Zu berechnen ist die geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$.
 (ii) Zu berechnen sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X < 1/2 \wedge Y < 1/4)$, $P(X < 1/2)$ und $P(Y < 1/4)$.
83. Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu beweisen oder zu widerlegen ist Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y .

84. Die Zufallsvariable X sei $E(\lambda)$ -verteilt. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X^2 .
85. Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich \mathbb{R}^+ und Wahrscheinlichkeitsdichte f . Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen \sqrt{X} .
86. Die Zufallsvariable X sei $E(\lambda)$ -verteilt. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen \sqrt{X} .
87. Seien X und Y unabhängig und beide $E(\lambda)$ -verteilt. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X + Y$.
88. Seien X und Y unabhängig und beide $E(\lambda)$ -verteilt. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X - Y$.
89. Seien X und Y Zufallsvariablen mit Wertebereich $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ und sei $(u(i, j))_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor von X und Y . Sei $w(k) = \sum_{i=0}^k u(k-i, i)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass $(w(k))_{k \in \mathbb{N}}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen $X + Y$ ist.
90. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, wobei X die $B(n, p)$ -Verteilung und Y die $B(m, p)$ -Verteilung habe. Zu zeigen ist, dass $X + Y$ die $B(n + m, p)$ -Verteilung besitzt.
91. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, wobei X die $P(\lambda)$ -Verteilung und Y die $P(\mu)$ -Verteilung habe. Zu zeigen ist, dass $X + Y$ die $P(\lambda + \mu)$ -Verteilung besitzt.
92. Ein Hersteller von LED-Lampen gewährt einen einmaligen Austausch einer defekten Lampe selbst nach der Gewährleistungsfrist von 2 Jahren, sofern bis dahin noch keine Gewährleistung erfolgt ist und der Kauf höchsten fünf Jahre zurückliegt. Die Lebensdauer der Beleuchtungskörper sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 2,5 Jahren und die Herstellungskosten betragen EUR 8 pro Einheit. Zu berechnen sind die erwarteten Kosten dieser freiwilligen Mehrleistung pro verkaufter Einheit. Es wird hier vorausgesetzt, dass alle Kund*innen im Falle eines Defekts diese Garantieleistung auch beanspruchen.
93. Die Lebensdauer eines Fernsehgerätes sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von sieben Jahren. Die Herstellerfirma stellt das Gerät zum Preis von EUR 1.300 her, verkauft es um EUR n und zahlt den Betrag zurück, wenn das Gerät innerhalb von zwei Jahren versagt. Wie ist n zu wählen, damit der Erwartungswert des Gewinnes EUR 350 beträgt?
94. Ein Computer zum Neupreis von EUR 1.250 wird in einem Ferienhaus verwendet, dort kommt es aufgrund der exponierten Lage im Schnitt alle 12 Jahre zu einem Totalschaden durch indirekten Blitzschlag. Aufgrund der Zufälligkeit der Blitzschläge kann die entsprechende Wartezeit als exponentialverteilt angenommen werden. Zu berechnen ist der Erwartungswert des Schadens an diesem Computer während der Nutzungsdauer von fünf Jahren, wenn der Restwert des Computers innerhalb der fünf Jahre linear affin auf EUR 250 fällt.

95. Ein Telekomunternehmen betreibt einen Satelliten zur Vermittlung von Telefongesprächen. Die Wartezeit bis zum ersten Schaden sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 25 Jahren, wobei jeder Schaden die Stilllegung des Satelliten zur Folge hat. Der Betrieb der Satelliten erzielt pro Jahr EUR 100 Mio. an Einnahmen aus den vermittelten Telefongesprächen. Zu berechnen ist der Erwartungswert der Einnahmen bei einer maximalen Nutzungsdauer von 18 Jahren.

96. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit folgendem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsvektor:

Y \ X	0	1	RV Y
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
RV X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Zu berechnen sind $E(X + Y)$, $E(XY)$ und $COV(X, Y)$.

97. Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8}y^2 + 3xy & \text{für } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu berechnen sind $E(X + Y)$, $E(XY)$ und $COV(X, Y)$.

98. Der Durchmesser (in mm) der von einer Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager sei normalverteilt mit $\sigma = 0.03$ mm. In einer Stichprobe vom Umfang 10 fand man folgende Durchmesser: 5.03, 5.03, 4.98, 4.97, 5.02, 5.03, 5.03, 4.98, 5.04, 4.99. Man berechne ein 95%-Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Durchmesser der Kugeln.

99. Welches Konfidenzintervall erhält man für die Werte aus Beispiel 98, wenn man σ nicht als bekannt voraussetzt?