Modul-Prüfung zu “Einführung in das mathematische Arbeiten” (WS 2022)

LV-Nummer: 250015-1, Prüfungstermin: 24.11.2022, 15:00 - 16:30 Uhr
Prüfungsdauer: 90min, Prüfungsort: Hörsaal 1, Oskar-Morgenstern-Platz 1

Name, Vorname: ________________________________ *Matrikelnummer:* ________________

Ist dies Ihr 4. Antritt? ☐ Ja ☐ Nein

Ich bestätige hiermit die Richtigkeit meiner Angaben und nehme die unten aufgeführten studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis.

Datum: ________________ *Unterschrift:* __________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
erreichte Punkte									
maximale Punkte									

Wenn mindestens X Punkte erreicht werden, gilt die Prüfung als bestanden.

Note: ____________

Zur Verfügung gestellt von:
Vera Fischer und Karlheinz Gröchenig
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2022/23
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle sechs Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 90 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.
- Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie an, welche Argumente Sie verwenden. Antworten ohne ausreichende Begründung bekommen keine Punkte.

Studienrechtliche Hinweise:
Es werden nur ordnungsgemäß angemeldete Studierende beurteilt (§ 12 Abs. 1 Satzung Studienrecht). Zudem werden Sie nur beurteilt, wenn Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen, Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis) und Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden. Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit “nicht genügend” beurteilt.

Aufgabe 1.

(1) Erklären Sie den Prinzip der Vollständigen Induktion.

(2) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \geq 1$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$$

gilt.

(X Punkte)

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $H = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Zeigen Sie, daß H eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.
(ii) Zeigen Sie, daß es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $H = d\mathbb{Z} = \{dk : k \in \mathbb{Z}\}$.
(X Punkte)

Aufgabe 3. Wir definieren eine Relation $\trianglelefteq$ auf $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ folgenderweise $a \trianglelefteq b :\Leftrightarrow a|b$.

(1) Zeige, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation ist.

(2) Ermittle die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke der gegebene Teilmenge von $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ bezüglich $\trianglelefteq$ oder zeige, dass solche besten Schranken nicht existieren: $\{4, 20, 100\}$.

(X Punkte)

Aufgabe 4. (i) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ (wie in der Vorlesung).

(ii) Untersuchen Sie die lineare Abhängigkeit oder lineare Unabhängigkeit der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(X Punkte)

Aufgabe 5.

(1) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Definieren Sie den folgenden Begriff und die Verneinung des Begriffes:
  (a) Die Folge (a_n) ist konvergent.
  (b) Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

(2) Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

(X Punkte)

Aufgabe 6. (X Punkte) (i) Sind die folgenden Gleichungen richtig oder falsch?

$(p \Rightarrow q) = (q \Rightarrow p)$	richtig	falsch
$(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg q)$	richtig	falsch
$((\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) = (q \vee \neg q)$	richtig	falsch

(ii) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Notation:

- Für reelle Zahlen $a < b$, sei $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

$(7,11) \approx \mathbb{R}$	richtig	falsch
$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{R}$	richtig	falsch
$\mathbb{Z}_7 \approx \mathbb{Z}_3$	richtig	falsch

Aufgabe 7

(i)Welche der folgenden Aussagen ist richtig.

$5^{192} \equiv -1 \mod 97.$ ☐

$5^{192} \equiv 98 \mod 97.$ ☐

$5^{192} \equiv 99 \mod 97.$ ☐

$5^{192} \equiv +1 \mod 97.$ ☐

$5^{192} \equiv 96 \mod 97.$ ☐

(ii) Die folgenden Vektoren sind linear abhängig:

$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,4)$ in $\mathbb{R}^3$ ☐

$v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ ☐

$v_1 = (4,3.5), v_2 = (\frac{1}{2},7), v_3 = (28,34)$ in $\mathbb{R}^2$. ☐

$v_1 = (2,3,0), v_2 = (0,0,4)$ in $\mathbb{R}^3$ ☐

(iii) Folgende Mengen definieren mit den angegebenen Verknüpfungen einen Ring mit Eins.

$(\mathbb{N},+,\cdot)$ ☐

$(2\mathbb{Z} \cup \{1\},+\cdot)$ ☐

$(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ ☐

$(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ ☐

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).