Modul-Prüfung zu “Einführung in das mathematische Arbeiten” (WS 2022)

LV-Nummer: 250015-1, Prüfungstermin: 17.01.2023, 13:15 - 14:45 Uhr
Prüfungsort: Hörsaal 1, Oskar-Morgenstern-Platz 1

Name, Vorname: ________________________________ *Matrikelnummer:* __________________

Ist dies Ihr 4. Antritt? ☐ Ja ☐ Nein

Ich bestätige hiermit die Richtigkeit meiner Angaben und nehme die unten aufgeführten studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis.

Datum: ________________ *Unterschrift:* ___________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
erreichte Punkte									
maximale Punkte	9	9	5	8	7	3	3	6	50

Wenn mindestens 25 Punkte erreicht werden, gilt die Prüfung als bestanden.

Note: _____________

Zur Verfügung gestellt von:
Vera Fischer und Karlheinz Gröchenig
PR StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2022/23
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Die Prüfung dauert 90 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.
- Aufgaben 1-5 und 8: Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie an, welche Argumente Sie verwenden. Antworten ohne ausreichende Begründung bekommen keine Punkte.
- Aufgaben 6-7: Kreuzen Sie an, wie angewiesen.

Studienrechtliche Hinweise:
Es werden nur ordnungsgemäß angemeldete Studierende beurteilt (§ 12 Abs. 1 Satzung Studienrecht). Zudem werden Sie nur beurteilt, wenn Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen, Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis) und Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden. Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit “nicht genügend” beurteilt.

Aufgabe 1. ($3+6$ **Punkte)**

(i) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz der Folge (a_n).

(ii) Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge beschränkt ist.

Aufgabe 2. ($4+5$ **Punkte**) Sei $H = \{29m + 81n : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Zeigen Sie, daß $(H, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.
(ii) Zeigen Sie, daß $H = \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. ($3+2$ **Punkte**) Betrachten Sie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$. Auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definieren wir die Relation $\trianglelefteq$ durch

$$(a,b) \trianglelefteq (a',b') :\Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b').$$

(i) Zeigen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definiert.

(ii) Bestimmen Sie die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke der gegebenen Teilmenge von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bezüglich $\trianglelefteq$ oder zeigen Sie, dass solche besten Schranken nicht existieren:

$$\{(1,3),(1,5),(3,3),(3,5)\}.$$

Aufgabe 4. (2 + 6 **Punkte)**

(i) Formulieren Sie den chinesischen Restsatz.

(ii) Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$, das durch 4 teilbar ist und die Kongruenzen $x \equiv 3 \mod 5$, $x \equiv 2 \mod 7$ erfüllt.

Aufgabe 5. ($2+5$ **Punkte**)

(i) Definieren Sie den Begriff der linearen **Abhängigkeit** von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_r\}$ in $\mathbb{R}^n$ (wie in der Vorlesung).

(ii) Untersuchen Sie die lineare Abhängigkeit oder lineare Unabhängigkeit der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear ....

Begründung/Rechnung:

Aufgabe 6. ($1+1+1$ **Punkte**)

(i) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

$(\neg(a \wedge (\neg a)))$ ☐

$(a \Rightarrow b) \vee b$ ☐

$(a \Rightarrow b) \vee \neg a$ ☐

(ii) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ ist überabzählbar. ☐

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar. ☐

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig. ☐

$\mathbb{Q} \times \{1,2\}$ ist überabzählbar. ☐

(iii) Die folgende Notation wird verwendet: Für reelle Zahlen $a < b$, sei $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Die Menge der irrationalen Zahlen wird durch $\mathscr{I}$ bezeichnet. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Das Bild von $\mathscr{I}$ unter f ist abzählbar. ☐

Das Bild von $(0,1)$ unter f ist abzählbar. ☐

Das Bild von $(0,1) \setminus \mathscr{I}$ unter f ist überabzählbar. ☐

Das Bild von $\mathbb{R} \setminus \mathscr{I}$ unter f ist abzählbar. ☐

Aufgabe 7 ($1+1+1$ **Punkte)**

(i) Seien $k,m,a,b \in \mathbb{N}, k \not\equiv 1 \mod m$ und $k \not\equiv 0 \mod m$.
Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind.

Falls $ka \equiv kb \mod m$, gilt auch $a \equiv b \mod m$. ☐

Falls $ka \equiv kb \mod m$ und $\mathrm{ggT}(k,m) = 1$, gilt auch $a \equiv b \mod m$. ☐

Falls $ka \equiv kb \mod m$ und $a \equiv b \mod m$, gilt $\mathrm{ggT}(k,m) = 1$. ☐

(ii) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind.

$50^{300} \equiv -1 \mod 101$. ☐

$50^{300} \equiv 100 \mod 101$. ☐

$50^{300} \equiv 1 \mod 101$. ☐

$50^{300} \equiv 3 \mod 101$. ☐

(iii) Kreuzen Sie an, welche der folgende Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen einen Ring mit Eins definieren.

$(2\mathbb{Z} \cup \{1\}, +, \cdot)$ ☐

$(\{0\} \cup \{n = 2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ ☐

$(\mathbb{Z}_3 \setminus \{\overline{0}\}, +, \cdot)$ ☐

$(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ☐

Aufgabe 8 ($3+3$ **Punkte)**

(i) Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

(ii) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

gilt.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).