

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 1A**

Aufgaben 1-2,5-6 sind der Sammlung “Mathematik macht Freu(n)de” entnommen. Die Aufgaben und das gesamte Übungsblatt sind als Einführung ins Übungsbetriebs zu betrachten. Sternchen Aufgaben sind freiwillig.

MATHEMATISCHE DENKWEISE

**Aufgabe 1** Formuliere die Verneinung der gegebenen Aussage:

- (1) Alle Babies sind niedlich.
- (2) Zwei Personen im Raum haben heute Geburtstag.
- (3) Alle Anwesenden sprechen Deutsch oder Englisch.

INDIZES, SUMMEN- UND PRODUKTSCHREIBWEISE

**Aufgabe 2** Schreibe mithilfe des Summenzeichens:

- (1)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$
- (2)  $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n}$
- (3)  $1 - 2 + 3 - \dots + 9 - 10$

**Aufgabe 3** Verwende Summen- und Produktschreibweise, um das Folgende darzustellen:

- (1) Die Summe der ersten 100 geraden natürlichen Zahlen.
- (2) Das Produkt der ersten 100 natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

**Aufgabe 4** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  und sei  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Symbol. Berechne:

- (1)  $\sum_{i,j=1}^3 \delta_{i,j} a_{ij}$
- (2)  $\sum_{i,j=1}^3 \delta_{i,j+1} a_{ij}$
- (3)  $\sum_{i,j=1}^3 \delta_{i+1,j} a_{ij}$

## VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

**Aufgabe 5** Zeige, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot k + 1) = (n + 1)^2.$$

**Aufgabe 6 (Bernoulli Ungleichung)** Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass gilt:

$$1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$$

WEITERE DISKUSSIONEN: NATÜRLICHE, GANZE, RATIONALE UND REELLE ZAHLEN

**Aufgabe 7** Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche davon sind falsch? Gibt es Aussagen die eine falsche oder unpräzise Annahme haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (1) Zwischen je zwei ungleichen natürlichen Zahlen gibt es eine dritte natürliche Zahl.
- (2) Zwischen je zwei ungleichen natürlichen Zahlen gibt es eine reelle Zahl.
- (3) Jede nichtleere Menge von reellen Zahlen hat ein kleinstes Element.
- (4) Jede nichtleere Menge von ganzen Zahlen hat ein kleinstes Element.
- (5) Jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.
- (6) Die Summe der ersten drei natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.
- (7) \* Die Summe der ersten drei rationalen Zahlen ist durch 3 teilbar.
- (8) Für jede reelle Zahl  $r$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so dass  $r < n$ .
- (9) Es gibt eine natürliche Zahl  $n$ , so dass für jede reelle Zahl  $r$ ,  $r < n$  gilt.

STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG  
BLATT 1 **B**

Die meisten Übungen sind der Sammlung “Mathematik macht Freu(n)de” entnommen.

Die Übungen der ersten Woche dienen zum Kennenlernen des Übungsbetriebs. Sie benötigen noch keine Kenntnisse aus der Vorlesung und sind mit Kenntnissen aus der Mittelschule lösbar. Die Betonung liegt auf der Genauigkeit der Erklärung.

1. Zeigen Sie:

- (i) Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.
- (ii) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

2. Wir bilden das Produkt beliebig vieler natürlicher Zahlen. Wie groß kann das Produkt höchstens sein, wenn die Summe der Faktoren 100 ist? (aus MmF)

3. Wahr oder falsch? Geben Sie Argumente (“Beweis” oder “Gegenbeispiel” für Ihre Antwort) (aus MmF):

- (a) Wenn eine natürliche Zahl  $n$  durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar.
- (b) Wenn  $n$  durch 4 und 6 teilbar ist, dann auch durch  $24 = 4 \cdot 6$ .
- (c) Wenn  $n$  durch 14 und 15 teilbar ist, dann auch durch  $210 = 14 \cdot 15$ .
- (d)\* Diskutieren Sie: Welche Aussage könnte für allgemeine Teiler gelten? Wenn  $n$  durch  $d_1$  und  $d_2$  teilbar ist, dann auch durch  $\dots$

4. Diskutieren, beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen:

- (i) Wenn  $n^3$  gerade (ungerade) ist, dann ist auch  $n$  gerade (ungerade).
- (ii) Wenn 3 die ganze Zahl  $n$  teilt, dann teilt auch 4 die Zahl  $n$ .

5. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung von Summen und Produktzeichen an:

- (i)  $\sum_{k=2}^6 2k^2$
- (ii)  $\prod_{j=1}^9 j$
- (iii)  $\sum_{l=-2}^4 a_l$

*Email address:* karlheinz.groechnig@univie.ac.at

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 2 A**

**Aufgabe 1** Zeige mit Hilfe von Wahrheitstabellen:

- (1)  $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- (2)  $(\neg(\neg p)) = p$

**Aufgabe 2**[Aus Sch-St] Weisen Sie explizit nach, dass die folgenden Gleichungen falsch sind:

- (1)  $(p \Rightarrow q) = (\neg p \Rightarrow \neg q)$
- (2)  $\neg(p \Rightarrow q) = (\neg p \Rightarrow \neg q)$

**Aufgabe 3** [Aus Sch-St] Es seien  $p, q$  und  $r$  beliebige Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche weder das eine noch das andere?

- (1)  $(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- (2)  $((r \Rightarrow p) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg r$
- (3)  $(q \vee (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p$

**Aufgabe 4**[Aus MmF] Sei  $Q(m)$  das Prädikat  $(\exists k \in \mathbb{N} : m = k^2)$ . Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist:

- (1)  $Q(16) \wedge \neg Q(17)$
- (2)  $\forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : [Q(m) \wedge Q(n) \Rightarrow Q(m + n)]$
- (3)  $\forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : [Q(m) \wedge Q(n) \Rightarrow Q(m \cdot n)]$

**Aufgabe 5**[Aus MmF] Seien  $n, l \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq l$ . Zeige, dass gilt:

$$\sum_{k=l}^n \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}.$$

\*\*\*\*\*

**Aufgabe 6 (Freiwillig)**[Aus MmF] Sei  $l \geq 1$  eine natürliche Zahl. Unser Ziel hier ist, die Gültigkeit folgender Formel für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  zu beweisen:

$$\prod_{k=1}^n [k \cdot (k + l)] = \frac{n! \cdot (n + l)!}{l!}$$

- (1) Schreibe die Formel ohne Verwendung des Produktzeichens.
- (2) Beweise die allgemeine Gültigkeit der Formel durch vollständige Induktion.

**Aufgabe 7 (Freiwillig)** Seien  $p, q, r$  Aussagenvariablen. Sind die Gleichungen richtig?

- (1)  $(\neg p \wedge (q \vee p)) \wedge r = (q \wedge r) \vee p$
- (2)  $\neg(p \wedge ((\neg q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r))) = \mathbf{1}$ .

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 2 B**

1. Zeigen Sie, daß es keine ganzen Zahlen  $m, n \in \mathbb{Z}$  gibt, sodaß

$$28m + 42n = 100.$$

(Hinweis: Indirekt, angenommen es gäbe solche Zahlen. Betrachten Sie dann die Teiler der Zahlen auf beiden Seiten. Aus Sch-St (=Schichl-Steinbauer))

2. Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie : Wenn  $n^3$  ungerade ist, dann ist auch  $n$  ungerade.

3. Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ , sodaß  $a|b$  und  $b|a$ . Welche Aussage können Sie über  $a$  und  $b$  treffen? Beweisen Sie Ihre Behauptung (aus MmF).

4. Ist die gegebene Aussage für alle ganzen Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  wahr? Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel (aus MmF):

(i) Wenn  $a|b$  und  $c|d$ , dann folgt  $a \cdot b|c \cdot d$ .

(ii) Wenn  $a \cdot b|c \cdot d$ , dann folgt  $a|c$  und  $b|d$ .

(iii) Wenn  $a|c$  und  $b|d$ , dann folgt  $a \cdot b|c \cdot d$ .

(iv) Wenn  $a \cdot b|c \cdot d$  und  $a|c$ , dann  $b|d$ .

5. Aus MmF: Welche Beweisidee liegt den folgenden Ungleichungen zugrunde?

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$$

und

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}.$$

(Hinweis: Konzentrieren Sie sich auf den kleinsten Summanden.)

Beweisen Sie nun, daß

$$\sum_{k=1}^{42} \frac{1}{k} \geq 3.$$

\*\*\*\*\*

6. Freiwillig: Formulieren Sie den Beweis für die Existenz der Primzahlfaktorisation aus der Vorlesung als Induktionsbeweis.

7. Freiwillig: Gegeben seien  $n$  beliebige, verschiedene Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Zeigen Sie, daß es eine Primzahl  $q$  gibt, die sich von den gegebenen Primzahlen unterscheidet. (Hinweis: Untersuchen Sie  $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$  wie in der Vorlesung).

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 3 A**

**Aufgabe 1**[Aus Sch-St] Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Zeigen Sie:

- (1)  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$  und  $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ ,
- (2)  $B \cup A = A \Rightarrow B \subseteq A$ .

**Aufgabe 2**[Aus MmF] Seien  $A, B \subseteq X$ . Zeigen Sie, dass die Mengen  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \cap B$  paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung die Menge  $A \cup B$  ist.

**Aufgabe 3**[Aus MmF] Wir definieren eine Relation  $\leq$  auf  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  folgenderweise  $a \leq b \Leftrightarrow a|b$ .

- (1) Zeige, dass  $\leq$  eine Ordnungsrelation ist.
- (2) Ist  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$  eine total geordnete Menge?
- (3) Ermittle die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke der gegebenen Teilmengen von  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  bezüglich  $\leq$  oder zeige, dass solche besten Schranken nicht existieren:  
a)  $\{4, 20\}$       b)  $\{5, 11\}$       c)  $\{2, 7, 42\}$

**Aufgabe 4** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei  $A_k = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r < k\}$ ,  $B_k = \{r \in \mathbb{R} : k \leq r\}$  und  $C_k = \{r \in \mathbb{R} : k \leq r < k + 1\}$ . Zeige:

- (1)  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2k+1}$
- (2)  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{2k} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{2k+1}$
- (3)  $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{2k}) \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{2k+1}) = \emptyset$

**Aufgabe 5** [Aus Sch-St] Sei  $f : A \rightarrow B$ , seien  $A_1, A_2$  Teilmengen von  $A$  und  $B_1, B_2$  Teilmengen von  $B$ . Beweisen Sie:

- (1)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- (2)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- (3)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
- (4)  $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

\*\*\*\*\*

**Aufgabe 6 (Freiwillig)**[Aus MmF] Wir definieren eine Relation  $\preceq$  auf  $\mathbb{R}^2$  folgenderweise:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow |x_2 - x_1| \leq y_2 - y_1.$$

- (1) Zeigen Sie, dass  $\preceq$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{R}^2$  ist. Ist  $\preceq$  eine Totalordnung?
- (2) Beschreiben Sie geometrisch die folgenden Mengen:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \preceq (0, 0)\} \text{ und } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) \preceq (x, y)\}.$$

**Aufgabe 7(Freiwillig)**[Aus Sch-St] Sei  $P(x)$  ein Prädikat, das von der freien Variable  $x$  abhängt, und sei  $q$  eine Aussage, die nicht von  $x$  abhängt. Zeigen Sie, dass gilt

$$(q \Rightarrow (\exists x : P(x))) = (\exists x : (q \Rightarrow P(x))).$$

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 3 B**  
**WOCHE 17.-21.10.**

1. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte der Verknüpfungstafel jedes Element genau einmal vorkommt (aus Oswald-Steding).

2. Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  gegeben. Betrachten Sie die Menge  $H = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Zeigen Sie, daß  $H$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  ist.

Zusatzaufgabe: Untersuchen Sie anhand von Beispielen, etwa  $a = 5, b = 7$  oder  $a = 6, b = 8$ , ob und wie die gegebene Gruppe einfacher geschrieben werden kann. Spekulieren Sie, was eine mögliche allgemeine Aussage sein könnte. (Die Antwort wird demnächst in der Vorlesung diskutiert.)

3. Betrachten Sie ein Rechteck, das kein Quadrat ist, und alle Rotationen und Spiegelungen, die das Rechteck auf sich selbst abbilden. Stellen Sie die Verknüpfungstabelle auf. Zeigen Sie, daß diese Abbildungen eine Gruppen bilden (Beweis der Assoziativität nicht notwendig).

4. (i) Zeigen Sie, daß die Restklassen  $\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  eine Gruppe bezüglich der Multiplikation von Restklassen bilden.

(ii) Vergleichen Sie mit  $(\mathbb{Z}_4, +)$  und geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen  $(\mathbb{Z}_4, +)$  und  $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$  an. (Hinweis: betrachten Sie die Verknüpfungstafeln) (aus Sch-St).

5. Sei  $\epsilon$  ein Symbol, das kein Element von  $\mathbb{R}$  repräsentiert. Betrachten Sie die Menge  $\mathbb{Z}[\epsilon] = \{m + n\epsilon : m, n \in \mathbb{Z}\}$  mit den Verknüpfungen

$$(m + n\epsilon) \oplus (m' + n'\epsilon) = (m + m') + (n + n')\epsilon$$
$$(m + n\epsilon) \odot (m' + n'\epsilon) = mm' + (mn' + m'n)\epsilon.$$

Zeigen Sie, daß  $(\mathbb{Z}[\epsilon], \oplus, \odot)$  ein Ring ist.

\*\*\*\*\*

6. Freiwillig: Sei  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge einer Menge  $M$  mit den Verknüpfungen

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A \odot B = A \cap B$$

für  $A, B \subseteq M$ . Die Elemente dieses Rings sind Teilmengen von  $M$ . Zeigen Sie, daß  $(\mathcal{P}(M), \oplus, \odot)$  ein Ring mit Eins ist. Was ist das Nullelement und das Einselement



in diesem Ring. Dieser Ring hat die merkwürdige Eigenschaft, daß  $A \oplus A = 0$  für alle  $A \subseteq M$ !

7. Freiwillig: Stellen Sie die vollständige Verknüpfungstafel der Gruppe der Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks auf. Finden Sie einige Untergruppen. (Achtung: die Drehungen in Buch von Schichl-Steinbauer sind im Urzeigersinn definiert, daher schaut die Verknüpfungstafel dort anders aus!)

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 4 A**  
**WOCHE 24.-28.10**

**Aufgabe 1** (aus MmF) Wir betrachten die Verknüpfung  $f \circ g : A \rightarrow C$  zwischen zwei Funktionen  $g : A \rightarrow B$  und  $f : B \rightarrow C$ . Ist die behauptete Implikation unbedingt richtig? Führe einen Beweis oder gib ein Gegenbeispiel an.

- (1) Sind  $f$  und  $g$  beide injektiv, dann ist auch  $f \circ g$  injektiv.
- (2) Ist  $f \circ g$  injektiv, dann ist auch  $f$  injektiv.
- (3) Ist  $f \circ g$  injektiv, dann ist auch  $g$  injektiv.
- (4) Sind  $f$  und  $g$  beide surjektiv, dann ist auch  $f \circ g$  surjektiv.
- (5) Ist  $f \circ g$  surjektiv, dann ist auch  $g$  surjektiv.
- (6) Ist  $f \circ g$  surjektiv, dann ist auch  $f$  surjektiv.

**Aufgabe 2** (aus MmF) Ermittle das Urbild  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in I\}$  des Intervalls  $I$  bezüglich der Abbildung  $f$ .

- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 7, I = (-5, 7]$
- (2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{9}{4}x^2 + 3x + 2, I = [2, 5)$
- (3)  $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x+3} - \frac{x+2}{x+5}, I = (0, \infty)$ .

**Aufgabe 3** (aus MmF) Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c \neq 0$  und  $a \cdot d \neq b \cdot c$ . Wir interessieren uns in dieser Aufgabe für die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}, f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

- (1) Vergewissere dich, dass die Funktion  $f$  wohldefiniert ist.
- (2) Zeige, dass  $f$  injektiv ist.
- (3) Zeige, dass  $f$  surjektiv ist.
- (4) Ermittle eine explizite Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

**Aufgabe 4** (aus MmF) Für endliche Mengen  $A$  und  $B$  gilt stets  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , wobei  $|X|$  die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $X$  bezeichnet. Verwende dies, um auch die Gleichung  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$  für je drei endliche Mengen  $A, B$  und  $C$  herzuleiten.

**Aufgabe 5** (aus MmF) Sei  $X$  eine endliche Menge mit genau  $n$  Elementen. Wir bezeichnen mit  $P_k(X)$  die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $X$ , wobei  $0 \leq k \leq n$ .

(1) Zeige, dass die Funktion

$$f : P_k(X) \rightarrow P_{n-k}(X), \quad f(A) = X \setminus A$$

eine Bijektion ist. Gib die Umkehrabbildung  $g : P_{n-k}(X) \rightarrow P_k(X)$  an.

(2) Es folgt, dass  $|P_k(X)| = |P_{n-k}(X)|$ . Welche Beziehung zwischen bestimmten Binomialkoeffizienten entspricht das?

**Aufgabe 6** (aus Sch-St) In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsen bzw. fallend?

- (1)  $f(x) = x^2, f(x) = 0,$
- (2)  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 4,$
- (3)  $f(x) = \cos(x), f(x) = \tan(x).$

**Aufgabe 7** Beweisen Sie oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

- (1) Die Menge  $S = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ist abzählbar.
- (2) Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.
- (3) Die Menge aller Funktionen von  $\mathbb{Q}$  to  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.
- (4) Die Menge aller konstanten Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  ist abzählbar.
- (5) Die Menge aller reellen, nicht rationalen Zahlen,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist überabzählbar.
- (6)  $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 1) \times (0, 1), \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  sind überabzählbar.
- (7)  $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$  ist abzählbar.

**Aufgabe 8** (aus MmF) Gib je ein Beispiel einer Relation an, die

- (1) transitiv und symmetrisch, aber nicht reflexiv ist;
- (2) symmetrisch und reflexiv, aber nicht transitiv ist;
- (3) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist.

\*\*\*\*\*

**Aufgabe 9 (Freiwillig)** (aus Just-Weese) Sei  $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Familie von Mengen. Zeigen Sie, dass es eine Familie  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit den folgenden drei Eigenschaften gibt:

- $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq A_n,$
- $\forall m, n \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow B_n \cap B_m = \emptyset,$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$

**Aufgabe 10 (Freiwillig)**

- (1) Gib ein Beispiel einer endlichen wohlfundierten Relation, die keine Totalordnung ist.
- (2) Sei  $R$  eine Relation auf  $M$ . Beweisen Sie: Die Relation  $R$  ist wohlfundiert genau dann, wenn es keine  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$  mit der Eigenschaft  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \prec a_n$  gibt.
- (3) Sei  $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Betrachten Sie die folgendermaßen definierte Relation  $\prec$  auf  $M$ :

$$\forall A, B \in M : A \prec B :\Leftrightarrow A \subsetneq B.$$

Zeigen Sie, dass  $\prec$  keine wohlfundierte Relation ist.

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 4 B**  
**WOCHE 24.-28.10.**

1. (i) Sei  $\mathbb{Z}_g$  die Menge der geraden ganzen Zahlen. Überprüfen Sie, ob  $(\mathbb{Z}_g, +, \cdot)$  ein Unterring von  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist.

(ii) Ist die Abbildung

$$\phi(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ k - 1 & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

ein Ring-Homomorphismus von  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  nach  $(\mathbb{Z}_g, +, \cdot)$ ?

2. Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $a \in K$ . Zeigen Sie, daß  $a \cdot a = 1$  genau dann gilt, wenn  $a = 1$  oder  $a = -1$ . (Hinweis: für Polynome gilt  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ . Wie hilft das in  $K$ ?)

3. Sei  $M_2(\mathbb{Z})$  die Menge aller Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  von  $M_2(\mathbb{R})$ . Überprüfen Sie, ob  $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$  ein Unterring von  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  ist.

4. Auf den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  seien folgende Verknüpfungen definiert:

$$a \oplus b = a + b - 3$$

$$a \otimes b = (a - 3)(b - 3) + 3 = ab - 3a - 3b + 12.$$

(i) Zeigen Sie, daß  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  ein Körper ist.

(ii) Finden Sie einen Körperisomorphismus  $f : (\mathbb{R}, \oplus, \otimes) \rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

5. (i) Sei  $K$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , sodaß  $(K, +, \cdot)$  (also mit Addition und Multiplikation von reellen Zahlen) ein Körper ist. Zeigen Sie, daß  $\mathbb{Q} \subseteq K$ .

(ii)\* Diskutieren Sie die abstrakte Version von (i). Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper, in dem jede Summe  $1 + 1 + \dots + 1$  ungleich dem Nullelement ist (wobei 1 das Einselement von  $K$  ist). Dann besitzt  $K$  einen Teilkörper, der isomorph zu  $\mathbb{Q}$  ist. (Hinweis: Finden Sie einen injektiven Körperhomomorphismus von  $\mathbb{Q}$  nach  $K$ .)

6. Zeigen Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel, daß eine der beiden gegebenen Aussagen richtig ist und die andere falsch. (aus MmF)

(i)  $\forall m, n, q, r \in \mathbb{Z} : \left( m = nq + r \Rightarrow \forall d \in \mathbb{Z} : [(d \mid m \wedge d \mid n) \Leftrightarrow (d \mid n \wedge d \mid r)] \right)$

(ii)  $\forall m, n, q, r \in \mathbb{Z} : \left( m = nq + r \Rightarrow \forall d \in \mathbb{Z} : [(d \mid m \wedge d \mid r) \Leftrightarrow (d \mid m \wedge d \mid q)] \right)$

Wo ist die korrekt formulierte Aussage relevant?

7. Zeigen Sie:  $\text{ggT}(2k + 1, 9k + 4) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

8. Finden Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus ganzzahlige Lösungen  $x, y \in \mathbb{Z}$  der folgenden Gleichungen, falls sie existieren.

(i)  $243x + 198y = 9$

(ii)  $71x - 50y = 1$

(iii)  $93x - 81y = 9$

(iv)  $93x - 81y = 10$

\*\*\*\*\*

9. Freiwillig: 6. Sei  $\mathcal{M} = \{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$  mit Addition und Multiplikation. Zeigen Sie, daß  $(\mathcal{M}, +, \cdot)$  kein Körper ist. Was macht den Unterschied zu  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  aus?

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 5 A**  
**WOCHE 31.10.-4.11**

**Aufgabe 1**(aus St-Sch) Sei  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein geordneter Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen für  $a, b, c, d \in K$ , ausschließlich unter Verwendung der Körperaxiome, der Definition einer Ordnung, der Ordnungsaxiome und Proposition 6.3.2 aus Schichl-Steinbauer. Begründen Sie jeden ihrer Schritte!

- (1) Gleichsinnige Ungleichungen “dürfen” addiert werden, genauer: aus  $a < b$  und  $c < d$  folgt  $a + c < b + d$ .
- (2) Gleichsinnige Ungleichungen “dürfen” immer dann miteinander multipliziert werden, wenn alle Glieder positiv sind, genauer: aus  $0 < a < b$  und  $0 < c < d$  folgt  $ac < bd$ .

**Aufgabe 2**(aus Sch-St) Sei  $K$  ein geordneter Körper.

- (1) Sei  $a \in K$  mit  $1 < a$ . Zeigen Sie, dass aus  $x \geq a$  und  $n \geq 2$  folgt, dass  $x^n > a$  gilt.
- (2) Sei  $b \in K$  mit  $0 < b < 1$ . Zeigen Sie, dass für  $n \geq 2$ , dass  $b^n < b$  ist.

**Aufgabe 3**(aus MmF) Beweisen Sie dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten:

- (1)  $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
- (2)  $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

**Aufgabe 4**(aus MmF) Sei  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung aller rationalen Zahlen, die im Intervall  $(0, 1)$  liegen. Zeige, dass  $\inf A_m = 0$  und  $\sup A_m = 1$  für all  $m \in \mathbb{N}$ , wobei  $A_m = \{q_n : n \geq m\}$ .

**Aufgabe 5**(aus Sch-St) Finden Sie die Lösungsmenge in  $\mathbb{R}$  der folgenden Systeme von Gleichungen bzw. Ungleichungen:

- (1)  $5 - 3x \leq 2x + 1 \leq 3x - 7$
- (2)  $|2x - 3| = |4x + 9|$
- (3)  $4x^2 - 9x \leq 5$
- (4)  $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$
- (5)  $\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2}$
- (6)  $x + 1 \leq x + 4 \leq 6 \leq 5x + 4$
- (7)  $|3x + 4| \leq |x + 8|$

\*\*\*\*\*

**Aufgabe 6 (Freiwillig)**(aus Sch-St) Zeigen Sie für  $a, b \in \mathbb{R}$  die Cauchy-Ungleichung

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

1

**Aufgabe 7 (Freiwillig)** Zeige, dass die Rechenoperation  $\otimes$  wohldefiniert auf  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$  ist, wobei  $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = b + a'$  und  $[(a, b)] \otimes [(a', b')] := [(aa' + bb', ab' + ba')]$ .

**Aufgabe 8 (Freiwillig)**(aus Sch-St) Zeigen Sie: In einem geordneten Körper folgt aus  $0 < a < b$

(1)  $a^2 < ab < b^2$

(2)  $a < \frac{a+b}{2} < b$

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 5 B**  
**WOCHEN 31.10-4.11.**

1. Es gelte  $\text{ggT}(a, m) \mid b$ . Dann ist nach einem Satz aus der Vorlesung die lineare Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  lösbar. Zeigen Sie, daß es genau  $\text{ggT}(a, m)$  Lösungen gibt, die  $\text{mod } m$  inkongruent sind.

2. Bestimmen Sie die Einheitengruppe der Restklassenringe  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8$  und  $\mathbb{Z}_9$ .

3. Gesucht ist eine positive, ganze Zahl, die bei Division durch 5 den Rest 4, bei Division durch 7 den Rest 6 und bei Division durch 9 den Rest 8 ergibt.

(i) Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz, um eine solche Zahl zu bestimmen.

(ii) Die geforderten Reste sind von einer besonderen Form. Hat man diese Besonderheit einmal erkannt, kommt man — ohne Restsatz — durch kurze Kopfrechnung auf die Lösung. Wie? (aus MmF)

4. Finde alle modulo  $20 \cdot 21 \cdot 23$  inkongruenten Lösungen des folgenden Systems:  $7x \equiv 8 \pmod{20}, 5x \equiv 6 \pmod{21}, 9x \equiv 13 \pmod{23}$ . (Welche Überlegung zusätzlich zum Chinesischen Restsatz ist notwendig?)

5. Sei  $n = b_0 + b_1 3 + b_2 3^2 + \dots + b_k 3^k$ ,  $b_j \in \{0, 1, 2\}$ , die “triadische” Entwicklung von  $n \in \mathbb{N}$ . Leiten Sie eine Regel für die Teilbarkeit durch 2, 7 und 9 ab.

\*\*\*\*\*

6. Freiwillig: Bestimmen Sie die Einheitengruppe im Polynomring  $\mathbb{R}[x]$  (Ring aller Polynome mit reellwertigen Koeffizienten).

7. Freiwillig: Sei  $p$  eine Primzahl und  $1 \leq k \leq p - 1$ .

(i) Zeigen Sie, daß  $p \mid \binom{p}{k}$ .

(ii) Folgern Sie, daß der binomische Lehrsatz in  $\mathbb{Z}_p$  so aussieht: für  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

8. Sei  $p$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und  $d \in \mathbb{N}$ , sodaß  $p(x) \equiv 0 \pmod{d}$  für  $d$  aufeinanderfolgende Werte von  $x$ . Zeigen Sie, daß dann  $p(x) \equiv 0 \pmod{d}$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$  gilt.



**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 6 A**  
**WOCHE 7.11.-11.11**

Die Übungen für die Woche 7.11-11.11. sind je nach Termin und Bedarf der Übungsgruppen relevant, jedenfalls zum Studium sehr empfohlen.

**Aufgabe 1**(aus St-Sch)

- (1) Führen Sie den Beweis, dass die Addition auf  $\mathbb{C}$  assoziativ und kommutativ ist, explizit aus. Rechnen Sie auch nach, dass  $(-a_1, -a_2)$  das additiv Inverse zu  $(a_1, a_2)$  ist.
- (2) Zeigen Sie explizit, dass die Multiplikation auf  $\mathbb{C}$  kommutativ und  $(1, 0)$  das Einselement ist.

**Aufgabe 2**(aus Sch-St) Bestimmen Sie für die komplexen Zahlen

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 2 - 4i, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 1 - i, \quad z_5 = 5 - 3i$$

$\bar{z}_i$ ,  $|z_i|$ ,  $\arg z_i$  und  $\frac{1}{z_i}$  für  $i = 1, \dots, 5$ . Berechnen Sie weiter  $z_i + z_j$ ,  $z_i - z_j$ ,  $z_i z_j$  und  $\frac{z_i}{z_j}$  für  $i, j = 1, \dots, 5$ . Stellen Sie das Resultat jeweils in der Form  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  dar.

**Aufgabe 3**(aus Sch-St) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$z_1 = \frac{1+i}{7-i}, \quad z_2 = \left| \frac{2-6i}{3+8i} \right|, \quad z_3 = (9+6i)^4, \quad z_4 = i^{101}, \quad z_5 = \sum_{n=1}^{1234} i^n.$$

**Aufgabe 4**(aus Sch-St)

- (1) Multiplizieren Sie  $3 + \frac{4}{3}i$  mit  $-2 + \frac{i}{2}$ . Wie sieht das in der komplexen Zahlenebene aus?
- (2) Was ist in  $\mathbb{C}$  das Inverse zu  $\frac{7}{2} - \frac{2}{4}i$ ?

**Aufgabe 5**(aus Sch-St) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden komplexen quadratischen Polynome:

- (1)  $p(z) = z^2 + 8z + 25$ ,
- (2)  $q(z) = z^2 - (6 + 2i)z + 43 - 6i$ ,
- (3)  $r(z) = z^2 + (5 - 5i)z - 13i$ .

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 6 B**  
**WOCHE 7.11.-11.11.**

Die Übungen für die Woche 7.11. – 11.11. sind je nach Termin und Bedarf der Übungsgruppen relevant, jedenfalls zum Studium sehr empfohlen.

1. (i) Berechnen Sie die Restklasse von  $27^{4800}$  modulo 601.  
(ii) Was können Sie über die Restklasse von  $27^{300}$  modulo 601 sagen?

2. Sei  $(G, \circ)$  eine abelsche Gruppe und  $f_a(x) = a \circ x$ .

(i) Dann ist  $f_a$  eine Bijektion, aber im allgemeinen kein Gruppen-Homomorphismus. Finden Sie Gegenbeispiele und untersuchen Sie, wann  $f_a$  doch ein Gruppen-Homomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Abbildung  $a \rightarrow f_a$  ein Gruppen-Homomorphismus von  $G$  nach  $S_G$  (Menge aller bijektiven Abbildungen von  $G$  nach  $G$ ) ist.

3. Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $\text{ggT}(m, n) = 1$ .

(i) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f(a) = (a \bmod m, a \bmod n)$$

eine Bijektion von  $\mathbb{Z}_{mn}$  nach  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  ist.

(ii) Wie müssen Sie Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  definieren, daß  $f$  sogar ein Ring-Isomorphismus wird?

4. Die quadratische Kongruenz  $x^2 \equiv a \pmod{n}$  (also Wurzelziehen im Restklassenring  $\mathbb{Z}_n$ ) ist im allgemeinen nicht immer lösbar.

(i) Untersuchen Sie für  $n = 5$  und  $n = 7$ , für welche  $a$  die Kongruenz lösbar ist.

(ii) Sei  $p$  eine Primzahl und  $a \in \mathbb{Z}, p \nmid a$ . Zeigen Sie:

Wenn  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  lösbar ist, dann besitzt diese Kongruenz genau zwei nicht-kongruente Lösungen modulo  $p$ .

(iii) Zeigen Sie (durch Probieren), daß die Kongruenz  $x^2 \equiv 1 \pmod{35}$  genau *vier* nicht-kongruente Lösungen modulo 35 besitzt. Wundern Sie sich?

**STEOP – ÜBUNGEN – FISCHER**  
**BLATT 7 A**  
**WOCHE 14.11.-18.11**

**Aufgabe 1** Beweisen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  nicht konvergent ist, wobei  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .  
**Hinweis:** Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  keine Cauchy-Folge ist. Kann  $a_{2n} - a_n$  beliebig klein sein?

**Aufgabe 2** Berechnen Sie den Limes der Folge  $(a_n)$ , wobei:

$$(a) a_n = \frac{\sin(n!)}{n} \quad (b) a_n = \frac{\arctan(n+1)}{n^2+1} \quad (c) a_n = \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n} \quad (d) a_n = \frac{\cos(n^2+n+1)}{n-\sqrt{2}}$$

**Aufgabe 3**(aus MmF) Bestimmen Sie

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{4^n - 5^{n+1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (7^n - 7^{n+2}) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \text{ wobei } a > 0, b > 0.$$

**Aufgabe 4**(aus Foster) Beweisen Sie: Für jede reelle Zahl  $b > 1$  und jede natürliche Zahl  $k$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n^k} = \infty$ .

**Aufgabe 5**(aus Foster) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen mit

$$\lim a_n = \infty \text{ und } \lim b_n =: b \in \mathbb{R}.$$

Man beweise:

$$(a) \lim(a_n + b_n) = \infty \quad (b) \text{ Ist } b > 0, \text{ so gilt } \lim(a_n b_n) = \infty; \text{ ist } b < 0, \text{ so gilt } \lim(a_n b_n) = -\infty.$$

**Aufgabe 6**(aus MmF) Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ , wobei  $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ , gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  explizit ein  $N \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq N$  stets  $|a_n - 1| < \varepsilon$  gilt.

**Aufgabe 7**(aus MmF) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge Nullfolge und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.

\*\*\*\*\*

**Aufgabe 8, Freiwillig** (aus Foster)

- (a) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit  $\lim a_n = a$ . Man beweise, dass dann die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definiert durch  $b_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.
- (b) Man gebe ein Beispiel einer nicht konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an, bei dem wie in Teil (1) definierte Folge  $(b_n)$  konvergiert.

**Aufgabe 9, Freiwillig** (aus MmF)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$  und

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
  - (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  - (c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent, aber nicht bestimmt divergent
- gilt.

**STEOP — ÜBUNGEN — GRÖCHENIG**  
**BLATT 7 B**  
**WOCHE 14.11.-18.11.**

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 19 \\x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 22.\end{aligned}$$

2. Geben Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  in der Form  $x = z + L_0(A)$  an, wobei  $L_0(A)$  die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Stellen Sie den Vektor  $(1, 4) \in \mathbb{R}^2$  als Linearkombination der Vektoren  $(1, 0)$  und  $(1, 1)$  dar.

4. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear abhängig sind. (aus Sch-St)

(i)  $u = (1, -1, 2), v = (3, 1, 1), w = (0, -5, 4)$ .

(ii)  $A = (4, 1, 1), B = (1, 3, 3), C = (-1, 3, 1)$ .

5. Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  zwei linear unabhängige Vektoren. Zeigen oder widerlegen Sie, daß die beiden Vektoren  $a = x + y$  und  $b = x - y$  auch linear unabhängig sind.

\*\*\*\*\*

6. Zusatzübung: Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Form  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ , die die Punkte  $P = (1, 3, -1), Q = (2, 1, 0)$  und  $R = (3, 0, 4)$  enthält. (aus Sch-St)

7. Seien  $v_1 = (1, 0)$  und  $v_2 = (0, 1)$ . Beschreiben und zeichnen Sie die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2, 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1\}.$$