Zur Verfügung gestellt von:
Philipp Grohs
UE StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten
WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

1. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

2. Zerlegen Sie folgende Zahlen in Primfaktoren:

   $$400, \quad 2049, \quad 279936, \quad 362880.$$

3. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- oder Produktzeichen an:

   $$1.)\ \sum_{k=2}^{12} k^{2k+1} \quad 2.)\ \prod_{j=1}^{9} i^3 \quad 3.)\ \sum_{k=-4}^{-6} b_k$$

4. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen an:

   1.) $1+3+9+27+81+243+729+2187$

   2.) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

   3.) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$

5. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollte eine Gleichung falsch sein, so stellen Sie die rechte Seite richtig:

   $$1.)\ \sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=3}^{7} a_{j-2} \quad 2.)\ \log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i} = \log 3 \sum_{j=0}^{n} a_j \quad 3.)\ \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$$

6. Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe, d.h. für beliebiges reelles q und $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie, dass

   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

   gilt.

7. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

   (i)

   $$\sum_{k=0}^{n} q^{-k} = \frac{q^{n+1}-1}{q^n(q-1)},\ q \neq 1,$$

   (ii)

   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}.$$

8. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

   (i)

   $$\sum_{k=0}^{n} (3k-2) = \frac{(1+n)(3n-4)}{2},\ n \neq 0,$$

   (ii)

   $$\prod_{k=0}^{n} \left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

   für $x \neq 1$ und $n \geq 0$.

9. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

   [Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz]

10. Berechnen Sie
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$
[Hinweis: Vergessen Sie nicht, den Fall $n = 0$ gesondert zu betrachten!]

11. Seien p, q beliebige Aussagen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr?
    (a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow \neg p$,
    (b) $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$.

12. Bilden Sie den Umkehrschluss der folgenden Aussagen:
    (a) $\forall n \in \mathbb{N}:\ n^2 > n \Rightarrow n > 1$,
    (b) $\forall n \in \mathbb{N}:\ n^3$ ungerade $\Rightarrow n$ ungerade.

13. Verneinen Sie folgende Aussage:

    Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt haben, dann sind sie nicht parallel.

14. Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind:
    (a) $\forall x \in \mathbb{N}:\ \exists y \in \mathbb{N}:\ x = y$,
    (b) $\exists x \in \mathbb{N}:\ \forall y \in \mathbb{N}:\ x = y$,
    (c) $\forall x \in \mathbb{N}:\ \exists y \in \mathbb{N}:\ x \geq y$,
    (d) $\exists x \in \mathbb{N}:\ \forall y \in \mathbb{N}:\ y \geq x$.

15. Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind:
    (a) $(\exists x:\ P(x) \wedge Q(x)) = ((\exists x:\ P(x)) \wedge (\exists x:\ Q(x)))$,
    (b) $(\forall x:\ P(x) \vee Q(x)) = ((\forall x:\ P(x)) \vee (\forall x:\ Q(x)))$.

16. Bestimmen Sie die folgenden Mengendurchschnitte:
    (a) $\{1, 2, 4, 6\} \cap \{4, 1, 5, 9, 12\}$,
    (b) $\{5z \mid z \in \mathbb{N}\} \cap \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$.
    (c) $\{6z \mid z \in \mathbb{N}\} \cap \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$.
    (d) $\bigcap_{n\geq 1} A_n$, wobei $A_n := \{0, 1, \ldots, n\}$.

17. Bestimmen Sie die Mengen $A \times B$, A^2, B^3 für die folgenden Mengen:
    (a) $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$,
    (b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1\}$,
    (c) $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$.

18. Berechnen Sie $\prod_{i=1}^{4} M_i$ mit $M_i := \{i, i + 1\}$.

19. Betrachten Sie auf der Menge der ganzen Zahlen die Äquivalenzrelation
$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade.}$$
    (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
    (b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.
    (c) Beschreiben Sie die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$.
    (d) Ersetzen Sie "ist gerade" durch "ist ungerade". Bleibt $\sim$ dann eine Äquivalenzrelation?

20. Seien $(A, \leq)$ and $(B, \preceq)$ geordnete Mengen. Auf $A \times B$ definieren wir die Relation $\trianglelefteq$ durch
$$(a, b) \trianglelefteq (a', b') :\Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \preceq b'),$$
die *lexikographische Ordnung*. Zeigen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation auf $A \times B$ definiert.

21. Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq A$. Zeigen Sie
    (a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,
    (b) $f(A_2 \setminus A_1) \supseteq f(A_2) \setminus f(A_1)$.

    Gilt Gleichheit? Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

22. Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion und $A_1, A_2 \subseteq A$. Zeigen Sie
    (a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$,
    (b) $f(A_2 \setminus A_1) = f(A_2) \setminus f(A_1)$.

23. Die Funktion $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ sei definiert durch den Graphen $\{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

24. Welche der folgenden Mengen sind abzählbar: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^5, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$?

25. Stellen Sie die Verknüpfungstabellen der Addition und Multiplikation in den Restklassenmengen $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$ auf.

26. Beweisen Sie, dass $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ eine Halbgruppe ist.

27. Beweisen Sie, dass $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ und $(M_2(\mathbb{R}), +)$ Monoide sind.

28. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ eine Gruppe ist.

29. Stellen Sie die Cayleytafeln von $(\mathbb{Z}_6, +)$ und von $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ auf. Welche Strukturen (Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe) liegen jeweils vor?

30. Überprüfen Sie ob die Menge $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_6, +)$ bildet.

31. Sei $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ und sei $(K, \circ)$ eine Untergruppe von $(H, \circ)$. Zeigen Sie, dass $(K, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist.

32. Zeigen Sie, dass die Menge aller bijektiven Abbildungen einer Menge M auf sich selbst bezüglich der Verknüpfung von Funktionen eine Gruppe bildet. Ist die Menge M endlich mit n Elementen, so nennen wie die entstehende Gruppe die *Permutationsgruppe mit n Elementen* und beschreiben sie mit $\mathfrak{S}_n$. Bestimmen Sie die Verknüpfungstafeln von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_4$.

33. Bestimmen Sie zwei Gruppenhomomorphismen zwischen $(\mathbb{Z}_3, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, +)$.

34. Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \square)$ Gruppen und sei $(H, \square)$ abelsch. Sei

    $$\mathrm{HOM}(G, H) := \{\varphi : G \to H : \ \varphi \text{ ist Gruppenhomomorphismus von } (G, \cdot) \text{ nach } (H, \square)\}$$

    die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach H mit der Verknüpfung

    $$\varphi \circ \varphi' : G \ni g \mapsto \varphi(g) \square \varphi'(g) \in H.$$

    Zeigen Sie, dass $(\mathrm{HOM}(G, H), \circ)$ eine Gruppe ist.

35. Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Zahlen c mit $|c| = 1$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

36. Sei ε ein Symbol und definiere

    $$\mathbb{R}[\varepsilon] := \{a + b\varepsilon : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

    mit den Verknüpfungen

    $$(a_1 + b_1\varepsilon) \oplus (a_2 + b_2\varepsilon) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\varepsilon,$$
    $$(a_1 + b_1\varepsilon) \otimes (a_2 + b_2\varepsilon) := (a_1 a_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)\varepsilon.$$

    Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}[\varepsilon], \oplus, \otimes)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

37. Betrachten Sie die Menge $M_2(\mathbb{Z})$ aller 2×2 Matrizen mit ganzzahligen Einträgen:

$$M_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \ \forall i, j \in \{1, 2\} : \ a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit den Operationen + und $\cdot$. Ist $M_2(\mathbb{Z})$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{R})$?

38. Bestimmen Sie die Einheitengruppe der Ringe $\mathbb{Z}_n$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

39. Enthält der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]$ aus Aufgabe 36 Nullteiler?

40. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\mathbb{R} \ni a \mapsto a + 0 \cdot \varepsilon \in \mathbb{R}[\varepsilon]$$
ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

41. Sei $\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ist lineare Abbildung}\}$ die Menge aller linearen Abbildungen von der Ebene in sich selbst. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}, +, \circ)$ mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $f \circ g(x) = f(g(x))$ einen Ring bildet. Zeigen Sie, dass der Ring $(\mathcal{L}, +, \circ)$ isomorph zu dem Ring $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist.

42. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $(-1, 4)$ und $(9, 5)$.

43. Finden Sie alle Normalvektoren zum Vektor $(1, 2)$.

44. Zeigen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $f : (x_1, x_2) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2)$ und $g : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ linear sind. Finden Sie die zugehörigen Matrixdarstellungen.

45. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Betrachten Sie die Matrix

$$S_v := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\|v\|^2} \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{bmatrix}.$$

Welche geometrische Wirkung hat die lineare Abbildung die von S_v definiert wird? Untersuchen Sie dazu die folgenden Spezialfälle für v: $e_1, e_2, (1, 1), (-1, 1)$. Gewinnen Sie daraus eine Vermutung, und beweisen Sie dann Ihre Vermutung.

46. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g : \{(0, 1, 1) + t(1, 1, 2) : \ t \in \mathbb{R}\}$ mit der Ebene $\epsilon_{A:B:C}$ mit $A = (0, 2, -1)$, $B = (2, 0, -1)$ und $C = (-1, 1, 0)$.

47. Überprüfen Sie ob die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

    (a) $(1, -1, 2), (3, 1, 1), (0, -5, 4)$,

    (b) $(4, 1, 1), (1, 3, 3), (-1, 3, 1)$.

48. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $(1, 0, -2, 3, 5)$ und $(4, 2, 1, -3, 0)$.

49. Bestimmen Sie den Einheitsvekotor in Richtung von $(3, 1, 3)$.

50. Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene durch die Punkte $(1, -2, 3), (2, 4, -1), (1, 3, 0)$.

1. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Das Produkt zweier ungeraden Zahlen ist ungerade.

2. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Es gibt keine ganzen Zahlen n, m mit $28m + 42n = 100$.

   [Hinweis: Beweisen Sie indirekt. Nehmen Sie an, es gäbe solche m und n. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite, der die rechte Seite nicht teilt.]

3. Die Matrix A sei für $i = 1, \ldots, 5$ und $j = 1, \ldots, 8$ gegeben durch $A_{ij} = i^2$. Schreiben Sie die Matrix A an.

4. Es sei die Zahlenfolge θ für $i = 1, \ldots, 10$ durch $\theta_{2i-1} = 1$ und $\theta_{2i} = 0$ gegeben. Schreiben Sie die Folge an und beschreiben Sie in Worten, welche Gestalt θ hat.

5. Finden Sie Formeln für die Eintragungen A_{ij} und B_{ij} der beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

6. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 + k\right) = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$$

   für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

7. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

8. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.

9. Beweisen Sie, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

10. Wir bezeichnen mit a, b und c beliebige binäre Variable. Sind die folgenden Gleichungen richtig?

    (i) $\neg(a \wedge (\neg a)) = 1$,

    (ii) $(\neg a \wedge (b \vee a)) \wedge c = (b \wedge c) \vee a$,

    (iii) $\neg(a \wedge ((\neg b \wedge \neg a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c))) = 1$.

11. Finden Sie die disjunktive Normalform der Boole'schen Funktion $f(a, b, c)$ welche durch folgende Wahrheitstafel definiert ist:

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

12. Beweisen Sie die Gesetze von DeMorgan mittels Wahrheitstafeln.

13. Beweisen Sie, dass

$$(p \Rightarrow q) \neq (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

14. Nehmen wir an, dass $p \Rightarrow q$ gilt. Was lässt sich dann über die folgenden Aussagen sagen?

$$1.\ \neg q \Rightarrow \neg p, \quad 2.\ \neg p \Rightarrow \neg q, \quad 3.\ q \Rightarrow \neg p, \quad 4.\ \neg p \Rightarrow q.$$

15. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche weder das eine noch das andere?

    (a) $(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

    (b) $((r \Rightarrow p) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg r$,

    (c) $(q \vee (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p$.

16. Man verneine die Aussage

    Jede Primzahl ist weder durch 2 oder durch 3 teilbar.

17. Seien G_1, G_2 Geraden. Was bedeutet die Aussage

    $$(\exists x :\ x \in G_1 \wedge x \in G_2) \Rightarrow \neg\,(G_1 \text{ parallel zu } G_2) \quad ?$$

    Wie lautet der äquivalente Umkehrschluss als logische Formel und in Worten?

18. Bestimmen Sie folgende Mengenvereinigungen:

    (a) $\{1,5,6\} \cup \{1,8,9,11\}$,

    (b) $\left\{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}\right\} \cup \mathbb{N}$,

    (c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{0\neq m\in\mathbb{N}} \left\{\frac{n}{m}\right\}$.

19. Bestimmen Sie die Menge $A \triangle B$ für die folgenden Mengen:

    (a) $A = \{1,2,5,8,9\}$, $B = \{2,3,5,7,9\}$,

    (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$,

    (c) $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

20. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen auf Transitivität und Reflexivität:

    (a) ist Onkel von,

    (b) lebt im selben Haus wie,

    (c) ist grösser als,

    (d) ist nicht kleiner als.

21. Zeichen Sie den Graphen der Funktion

    $$f : \{0,1,\ldots,n\} \to \mathbb{N}, \quad f(k) = k^3 + 1.$$

22. Zeichen Sie den Graphen der Funktion

    $$f : [-3,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3.$$

23. Bestimme Bild $f_i(A_i)$ und Urbild $f_i^{-1}(B_i)$, $i = 1,2,3$ für

    (a) $f_1(x) = x + 3$, $A_1 = \{1,2,5\}$, $B_1 = (-1,3)$,

    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = (-1,1)$, $B_2 = \{-1,0\}$,

    (c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ eine Konstante), $A_3 = \{0\} \cup (1,2)$, $B_3 = \{a\}$.

24. Sei $f : A \to B$ eine Funktion und seien $B_1, B_2 \subseteq B$. Zeigen Sie

    (a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

    (b) $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$.

25. Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

    (a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$,

    (b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$,

    (c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2 + 1$,

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x + 1$,

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$.

26. Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ für die folgenden Funktionen.

    (a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$,

    (b) $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{3}$, $g(x) = x^2 - 1$,

    (c) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^3$.

27. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \to \{0, \dots, 8\}$ mit $f(n, m) := 3(n-1)+m-1$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

28. Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass
$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|},$$
indem Sie eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(M)$ und 2^M konstruieren.

29. Überprüfen Sie ob die angebebene Operation $\circ$ auf der Menge M eine Verknüpfung darstellt:

    (a) $M = \{0, 1\}$, $a \circ b = ab$,

    (b) $M = \{0, 1, 2\}$, $a \circ b = ab$,

    (c) $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, $a \circ b = a$,

30. Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei die Verknüpfung
$$a \otimes b := ab - 4$$
definiert. Überprüfen Sie die Assoziativität dieser Verknüpfung.

31. Zeigen Sie, dass die drei verschiedenen (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden. Wie verhält sich diese Gruppe zur Gruppe $(\mathbb{Z}_3, +)$?

32. Sei
$$\mathbb{R}[x] := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : \ n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } i = 0, \dots, n \text{ gilt } a_i \in \mathbb{R}\right\}$$
die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Finden Sie Formeln für die Koeffizienten von $p + q$ und $p \cdot q$ für beliebige $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

33. Bestimmen Sie die Einheitengruppe zu dem Ring aus Aufgabe 32.

34. Zeigen Sie, dass der Ring aus Aufgabe 32 ein Integritätsbereich ist.

35. Zeigen Sie, dass der Ring aus Aufgabe 32 mit $|p| = \deg(p)$ ein Euklidischer Ring ist.

    [Hinweis: Wir bezeichnen mit $\deg(p)$ den Grad eines Polynoms, also die Zahl n mit $p(x) = a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$. Zu zeigen ist also, dass die Bewertungsfunktion deg die Bedingungen erfüllt, die in der Definition eines Euklidischen Rings gefordert werden. Um das zu zeigen müssen Sie sich mit der "Division mit Rest" für Polynome befassen.]

36. Bestimmen Sie den ggT von
$$p(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$q(x) = -x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2$$
in $\mathbb{R}[x]$.

    [Hinweis: Führen Sie den Euklidischen Algorithmus durch und verwenden Sie Aufgabe 35.]

37. Definiere für $\imath$ mit $\imath^2 = -1$ die Menge
$$\mathbb{Q}[\imath] := \{a + b\imath : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$
mit den Verknüpfungen
$$(a_1 + b_1\imath) + (a_2 + b_2\imath) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\imath,$$
$$(a_1 + b_1\imath) \cdot (a_2 + b_2\imath) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\imath.$$
Zeigen Sie, dasss $\mathbb{Q}[\imath]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

38. Betrachte die Menge
$$K := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$
als Unterring von $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass K isomorph zu $\mathbb{Q}[\imath]$ ist.

39. Zeigen Sie, dass
$$1 + 1 = 2$$
gilt.

40. Sei $(G, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie, dass genau ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $G = \{kn : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Für welche n ist G isomorph zu $\mathbb{Z}$?

41. Sei K ein geordneter Körper und $1 < a \in K$. Zeigen Sie, dass für $x \geq K$ mit $x > a$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt, dass
$$x^n > a.$$
[Hinweis: Verwenden Sie, dass in einem geordneten Körper für $x \geq 0$ und $y \leq z$ gilt, dass $xy \leq xz$, sowie vollständige Induktion nach n.]

42. Definiere für $x \in \mathbb{R}$ den Absolutbetrag $|x| := \begin{cases} x : & x > 0 \\ -x : & x \leq 0 \end{cases}$. Zeigen Sie die Dreiecksungleichung
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

43. Beweisen Sie, dass
    - $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,
    - $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

    [Hinweis: Fallunterscheidung ($a \leq b$, $b \leq a$).]

44. Eine nichtleere nach unten beschränkte Menge $S \subseteq \mathbb{Q}$ heißt Dedekindschnitt, falls
$$\forall q \in \mathbb{Q} \setminus S : \ \forall s \in S : \ s \geq q, \tag{1}$$
$$\forall s \in S : \ \exists s' \in S : \ s > s'. \tag{2}$$
Seien S und T Dedekindschnitte und definiere
$$S + T := \{s + t : \ s \in S \wedge t \in T\}.$$
Zeigen Sie, dass $S + T$ ebenfalls ein Dedekindschnitt ist.

45. Für eine komplexe Zahl $z = a + \imath b \in \mathbb{C}$ ($\imath^2 = -1$) sei $\overline{z} := a - \imath b$ die konjungiert komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:
$$\overline{\overline{z}} = z,$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

46. Bestimmen Sie für die komplexen Zahlen
$$z_1 = 3 + 2\imath, \quad z_2 = 2 - 4\imath, \quad z_3 = -\imath, \quad z_4 = 1 - \imath, \quad z_5 = 5 - 3\imath$$
$\overline{z_i}$, $|z_i|$, $\arg(z_i)$ und $1/z_i$. Stellen Sie das Resultat jeweils in der Form $a + \imath b$ dar.

47. Bestimmen Sie die Wurzel aus $-3-4\imath$. [Hinweis: Sei $a+\imath b$ die Wurzel. Dann gilt $(a+\imath b)^2 = (a^2-b^2)+\imath(2ab) = -3 - 4\imath$, sowie $a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$ (wieso??). Daraus lässt sich a, b bestimmen.]

48. Stellen Sie den Punkt $(1, 4) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Elemente $(1, 0)$ und $(1, 1)$ dar.

    [Hinweis: Wir suchen Koeffizienten $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit $(1, 4) = \mu_1(1, 0) + \mu_2(1, 1)$. Schreiben Sie das als äquivalentes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ für $x = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, und mit geeigneten $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Es gilt dann $x = A^{-1}b$.]

49. Sei $P = (-1, 4)$ und $Q = (2, 10)$. Sei $g = g_{P:Q}$ die Gerade durch P, Q, $\overline{PQ}$ die Strecke von P nach Q und $s_{P:Q}$ der Strahl von P nach Q.Sei $R = (-4, -2)$, $S = (1, 8)$ und $T = (4, 7)$. Überprüfen Sie für diese Punkte ob sie auf $g_{P:Q}$, $s_{P:Q}$, $\overline{PQ}$ liegen.

50. Wir haben bereits gesehen, dass die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (zB) in $\mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, falls x, y kollinear und gleich orientiert sind oder einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.