LÖSUNGEN

StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23

(Stefan Haller)

1. Termin am 19. Dezember 2022

von 14:00 bis 15:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in den Hörsälen 1, 4 und 14

Name:	Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Achtung: Der 4. Antritt muss verpflichtend kommissionell erfolgen!

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Studienrechtliche Hinweise für Studierende

Eine Beurteilung ist nur zulässig, wenn:

- Sie korrekt zu dieser Prüfung angemeldet sind,
- Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen,
- Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis),
- Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden (Lehrveranstaltungsleiter*innen geben vor Beginn der Prüfung bekannt, welche Hilfsmittel verwendet werden dürfen).

Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit "nicht genügend" beurteilt.

Unterschrift der*des Studierenden

Ich bestätige, dass ich

- ordnungsgemäß angemeldet bin, die Prüfungsmodalitäten und den Ablauf der Prüfung und die studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis genommen habe,
- mich an die geltenden Gesetze und Verordnungen in Bezug auf COVID-19 (insb. Sicherheits- und Hygienebestimmungen) halte. Informationen zusammengefasst unter `https://studieren.univie.ac.at/info`

Datum Unterschrift Studierende*r

Besondere Vorkommnisse während der Prüfung

(Nur von der Lehrveranstaltungsleiter*in oder dem Aufsichtspersonal auszufüllen)

Beschreibung des Vorfalls (falls zu wenig Platz, bitte Rückseite verwenden):

Datum, Uhrzeit Unterschrift

Version 10-2021 (SL/P10 COVID)

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer Primzahl? Gib eine präzise Definition. (2 Punkte)
(b) Beweise das Lemma von Euklid: Teilt eine Primzahl das Produkt zweier ganzer Zahlen, dann teilt sie auch einen der beiden Faktoren. (4 Punkte)

a) vgl. VO 10. Oktober

b) — // —

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{n-1}{n}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt.

Induktionsanfang, $n=2$:

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{(2-1)\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{((n+1)-1)(n+1)}$$

$$\overset{IV}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)(n+1) + 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ und jede Teilmenge A von X? Begründe die Antwort, d.h., gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (3 Punkte)

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters seien B_1 und B_2 zwei Teilmengen von Y. Zeige, dass in dieser Situation

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

gilt. (3 Punkte)

a) Nein!

Gegenbsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$A = \{2\}$

$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(4) = \{-2, 2\} \neq A$

b) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow x \in X \wedge f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\Leftrightarrow x \in X \wedge (f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2)$

$\Leftrightarrow (x \in X \wedge f(x) \in B_1) \vee (x \in X \wedge f(x) \in B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

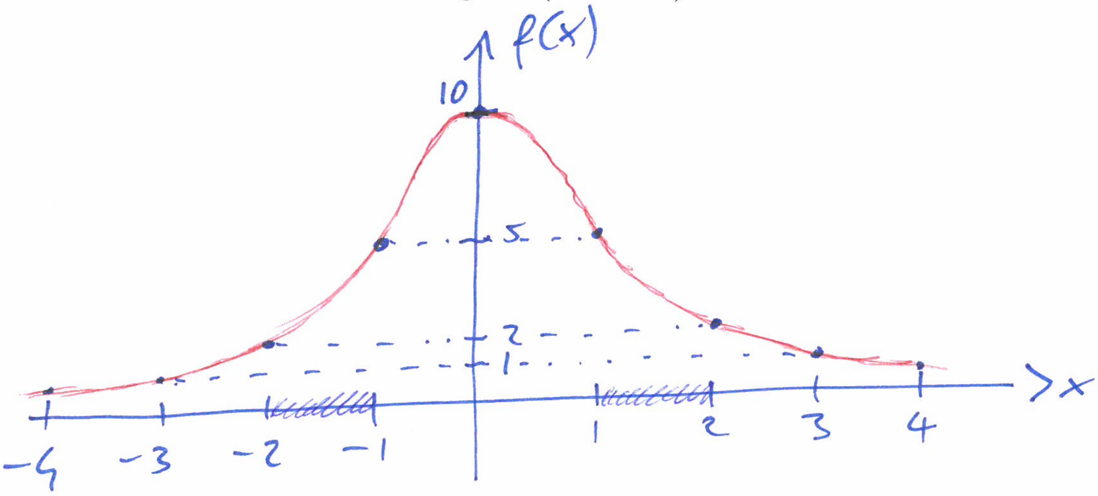
$$f(x) = \frac{10}{1+x^2}.$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}([-1,1])$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)

(b) Begründe, warum f nicht injektiv ist. (1 Punkt)

(c) Begründe, warum f nicht surjektiv ist. (1 Punkt)

(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[a,b] \to [2,5]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).



x	$f(x)$
0	10
±1	5
±2	2
±3	1
±4	10/17

a) $f^{-1}([-1,1]) = (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

b) $f(x) = f(-x)$

c) $f(x) > 0$

d) entweder $a=1,\ b=2$

Umkehrabb. $[2,5] \to [1,2],\ y \mapsto \sqrt{\frac{10}{y}-1}$

oder $a=-2,\ b=-1$

Umkehrabb. $[2,5] \to [-2,-1],\ y \mapsto -\sqrt{\frac{10}{y}-1}$

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$17 \cdot n + 19 \equiv 22 \mod 100$$

genügen.

$$100 = 5 \cdot 17 + 15$$
$$17 = 1 \cdot 15 + 2$$
$$15 = 7 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 15 - 7 \cdot 2$$
$$= 15 - 7 \cdot (17 - 15) = -7 \cdot 17 + 8 \cdot 15$$
$$= -7 \cdot 17 + 8 \cdot (100 - 5 \cdot 17) = 8 \cdot 100 - 47 \cdot 17$$

$$[17]^{-1} = [-47] = [53] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{100}$$

$$[n] = [17]^{-1} \cdot ([22] - [19])$$
$$= [53] \cdot [3]$$
$$= [159]$$
$$= [59]$$

$$\underline{n = 59 + 100 \cdot k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + (6 - 4\mathbf{i})z + 2 - 8\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

$$z = -3+2i \pm \sqrt{(-3+2i)^2 - (2-8i)}$$

$$= -3+2i \pm \sqrt{9-4-12i-2+8i}$$

$$= -3+2i \pm \sqrt{3-4i}$$

$$= -3+2i \pm \left(\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2}}}_{2} - i\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2}}}_{1} \right)$$

$$= -3+2i \pm (2-i)$$

$$\underline{z_1 = -1+i}$$

$$\underline{z_2 = -5+3i}$$

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. In jeder der sechs Gruppe (a)–(f) sind genau zwei Antworten richtig. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl einer Gruppe negativ, wird sie auf Null aufgerundet.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? (2 Punkte)

- ☐ $p \wedge \neg p$
- ☒ $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- ☐ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
- ☒ $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (2 Punkte)

- ☒ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$
- ☒ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (4 \mid ab \wedge 2 \nmid a) \Rightarrow 4 \mid b$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 6 \mid ab \Rightarrow (6 \mid a \vee 6 \mid b)$

(c) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$n \, R \, m \quad :\Leftrightarrow \quad |n - m| \leq 2$$

ist: (2 Punkte)

- ☒ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☒ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(d) Welche der folgenden Mengengleichheiten gelten für alle Mengen A, B und C? (2 Punkte)

- ☒ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- ☐ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- ☐ $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset$
- ☒ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv? (2 Punkte)

- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n$
- ☒ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $n \mapsto (n, n^2)$
- ☐ $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(n, m) \mapsto n - m$
- ☒ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto 3^n 5^m$

(f) Welche der folgenden Mengen bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring? (2 Punkte)

- ☐ $\mathbb{N}$
- ☒ $\mathbb{Z}$
- ☒ $\mathbb{Z}_g$, die geraden Zahlen
- ☐ $\mathbb{Z}_u$, die ungeraden Zahlen