Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
PR StEOP Einführung in die Mathematik, WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250032
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

StEOP Modulprüfung

Einführung in die Mathematik

Sommersemester 2021

(Stefan Haller)

1. Termin am 20. Dezember 2021

von 10:00 bis 11:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in den Hörsälen 1, 4 und 14

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenschlüssel					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer Primzahl? Gib eine präzise Definition. (2 Punkte)
(b) Formuliere das Lemma von Euklid. (1 Punkt)
(c) Beweise das Lemma von Euklid. (3 Punkte)

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$A \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B) \,\Delta\, (A \cup C)$$

für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort, d.h., gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (3 Punkte)

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters seien B_1 und B_2 zwei Teilmengen von Y. Zeige, dass in dieser Situation

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

gilt. (3 Punkte)

4. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gib reelle Zahlen a und b an, sodass

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \setminus \{b\}, \quad f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

eine wohldefinierte Bijektion ist. (2 Punkte)

(b) Gib die Umkehrabbildung von f inkl. Definitions- und Zielmenge an. (2 Punkte)

(c) Bestimme $f((5,6])$. (1 Punkt)

(d) Bestimme $f^{-1}([1,3])$, wobei nun f als Abbildung $\mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ aufzufassen ist. (1 Punkt)

5. Aufgabe (6 Punkte)

Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{173}$ bestimme die Lösung der Gleichung

$$[30] \cdot x + [19] = [17]$$

und gib sie in der Form $x = [n]$ mit $0 \leq n < 173$ an. Dabei bezeichnet $[n] = [n]_{173} \in \mathbb{Z}_{173}$ die Restklasse einer ganzen Zahl n modulo 173.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimme die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + (6 + 4\mathbf{i})z + 2 + 8\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. Bei jeder Frage ist mindestens eine Antwort richtig. Insgesamt sind zwölf Antworten korrekt. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl des Multiple-Choice-Teils negativ, wird auf Null aufgerundet.

(a) Die Aussage $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ist:
- ☐ eine Tautologie
- ☐ eine Kontradiktion
- ☐ weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion

(b) Welche der folgenden Aussagen sind zu $p \Rightarrow q$ äquivalent?
- ☐ $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
- ☐ $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$
- ☐ $(\neg p) \vee q$
- ☐ $p \wedge (\neg q)$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- ☐ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ac = bc \Rightarrow a = b$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{N} : a + n = b \vee b + n = a$
- ☐ $\forall m, n \in \mathbb{N} : mn = 1 \Rightarrow (m = 1 \wedge n = 1)$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : a \mid c \wedge b \mid c$
- ☐ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow ab \mid c$

(d) Sind $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ zwei Abbildungen, sodass $g \circ f$ bijektiv ist, dann muss auch gelten:
- ☐ f ist injektiv.
- ☐ f ist surjektiv.
- ☐ g ist injektiv.
- ☐ g ist surjektiv.

(e) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$n \; R \; m \quad :\Leftrightarrow \quad (n-1)^2 \leq (m-1)^2$$

ist:
- ☐ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch
- ☐ eine Totalordnung

(f) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?
- ☐ $\varphi \colon (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\varphi(x) = x^2$
- ☐ $\psi \colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\psi(n) = (-1)^n$
- ☐ $\rho \colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$, $\rho(z) = z^2$