

LÖSUNGEN

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
PR StEOP Einführung in die Mathematik, WiSe 2022/23
LV-Nr.: 250032
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23

(Stefan Haller)

2. Termin am 13. Jänner 2023

von 7:30 bis 9:00 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in den Hörsälen 1 und 4

Name:

Matrikelnummer:

1. Antritt 2. Antritt 3. Antritt 4. Antritt

Achtung: Der 4. Antritt muss verpflichtend kommissionell erfolgen!

| erreichte Punktezahl | | | | | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|----|--------|
| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | MC | gesamt |
| Punkte: | | | | | | | | |

| Notenskala | | | | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Punkte: | 0–24 | 24–30 | 30–36 | 36–42 | 42–48 |
| Note: | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Studienrechtliche Hinweise für Studierende

Eine Beurteilung ist nur zulässig, wenn:

- Sie korrekt zu dieser Prüfung angemeldet sind,
- Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen,
- Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis),
- Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden (Lehrveranstaltungsleiter*innen geben vor Beginn der Prüfung bekannt, welche Hilfsmittel verwendet werden dürfen).

Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit “nicht genügend” beurteilt.

Unterschrift der*des Studierenden

Ich bestätige, dass ich

- ordnungsgemäß angemeldet bin, die Prüfungsmodalitäten und den Ablauf der Prüfung und die studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis genommen habe,
- mich an die geltenden Gesetze und Verordnungen in Bezug auf COVID-19 (insb. Sicherheits- und Hygienebestimmungen) halte. Informationen zusammengefasst unter <https://studieren.univie.ac.at/info>

Datum

Unterschrift Studierende*r

Besondere Vorkommnisse während der Prüfung

(Nur von der Lehrveranstaltungsleiter*in oder dem Aufsichtspersonal auszufüllen)

Beschreibung des Vorfalls (falls zu wenig Platz, bitte Rückseite verwenden):

Datum, Uhrzeit

Unterschrift

1. Aufgabe (6 Punkte)

Seien a und b ganze Zahlen.

- (a) Zeige, dass ganze Zahlen x und y existieren, sodass (4 Punkte)

$$\text{ggT}(a, b) = ax + by.$$

- (b) Sind die ganzen Zahlen x und y in dieser Darstellung des größten gemeinsamen Teilers eindeutig bestimmt? Begründe die Antwort. (2 Punkte)

vgl. VO 7. Oktober

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=2}^n (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt.

Induktionsanfang, $n=2$:

$$\sum_{k=2}^2 (k-1)(k+2) = (2-1)(2+2) = 4 = \frac{(2-1) \cdot 2 \cdot (2+4)}{3}$$

Induktionsschritt, $n \rightarrow n+1$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)(k+2) = \sum_{k=2}^n (k-1)(k+2) + ((n+1)-1)((n+1)+2)$$

$$\stackrel{\textcircled{IV}}{=} \frac{(n-1)n(n+4)}{3} + n(n+3)$$

$$= \frac{n((n-1)(n+4) + 3(n+3))}{3}$$

$$= \frac{n(n^2 - n + 4n - 4 + 3n + 9)}{3}$$

$$= \frac{n(n^2 + 6n + 5)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3} = \frac{((n+1)-1)(n+1)((n+1)+4)}{3}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

für alle Mengen A , B und C ? Begründe die Antwort. (3 Punkte)

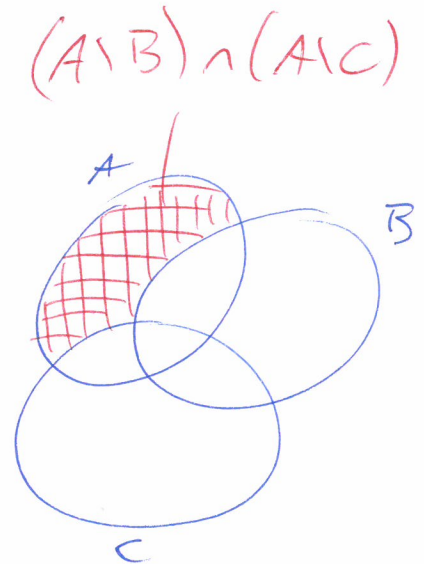
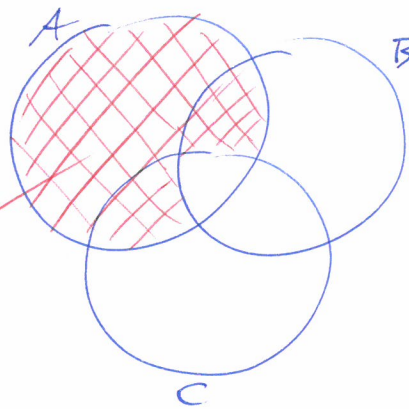
(b) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y , d.h., $B_i \subseteq Y$ für jedes $i \in I$. Zeige, dass in dieser Situation

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

gilt. (3 Punkte)

a) Nein!

$$A \setminus (B \cap C)$$



Gegenbeispiel: $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$

$$A \setminus (B \cap C) = A \setminus \emptyset = A \neq \emptyset$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset \cap A = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \forall i \in I: f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I: x \in X \wedge f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I: x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

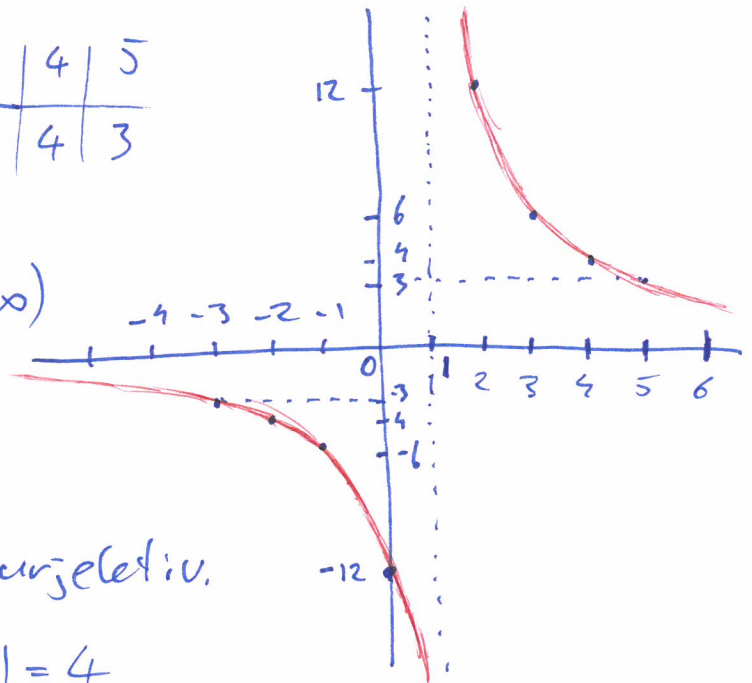
4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{12}{x-1}$$

- Gib das Urbild $f^{-1}([-3, 3])$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)
- Begründe, warum $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt. (1 Punkt)
- Begründe, warum $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt. (1 Punkt)
- Ermittle reelle Zahlen a und b , für die die Einschränkung $[3, 4] \rightarrow [a, b]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).

| | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|-----|----|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | -3 | -4 | -6 | -12 | 12 | 6 | 4 | 3 |



a) $f^{-1}([-3, 3]) = (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$

b) f ist injektiv.

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ surjektiv.

d) $b = f(3) = 6$, $a = f(4) = 4$

$f: [3, 4] \rightarrow [4, 6]$ bijektiv

$$y = \frac{12}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-1}{12} \Leftrightarrow \frac{12}{y} + 1 = x$$

$$f^{-1}: [4, 6] \rightarrow [3, 4], \quad f^{-1}(y) = \frac{12}{y} + 1$$

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$31 \cdot n + 44 \equiv 55 \pmod{100}$$

genügen.

$$100 = 3 \cdot 31 + 7$$

$$31 = 4 \cdot 7 + 3$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (31 - 4 \cdot 7)$$

$$= -2 \cdot 31 + 9 \cdot 7 = -2 \cdot 31 + 9 \cdot (100 - 3 \cdot 31)$$

$$= 9 \cdot 100 - 29 \cdot 31$$

$$[31]^{-1} = [-29] = [71] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{100}$$

$$[n] = [31]^{-1} \cdot [11]$$

$$= [71] \cdot [11] = [781] = [81]$$

$$\underline{\underline{n = 81 + 100 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}}}$$

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 + 2i)z + 5 - 10i = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + bi$ mit reellen a und b an.

$$z = 1 + i \pm \sqrt{(1+i)^2 - (5-10i)}$$

$$= 1 + i \pm \sqrt{-5 + 42i}$$

$$= 1 + i \pm \left(\underbrace{\sqrt{\frac{(-5)^2 + 12^2 + 5}{2}}}_2 + i \underbrace{\sqrt{\frac{(-5)^2 + 12^2 + 5}{2}}}_3 \right)$$

$$= 1 + i \pm (2 + 3i)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 3 + 4i \\ z_2 = -1 - 2i \end{array}}$$

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. In jeder der sechs Gruppen (a)–(f) sind genau zwei Antworten richtig. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl einer Gruppe negativ, wird sie auf Null aufgerundet.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? (2 Punkte)

- $p \vee \neg p$
- $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \vee (q \wedge r))$
- $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
- $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (2 Punkte)

- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow (a + b) \mid c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow ab \mid c$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (6 \mid ab \wedge 2 \nmid b) \Rightarrow 2 \mid a$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (7 \mid ab \wedge 7 \nmid b) \Rightarrow 7 \mid a$

(c) Die Relation R auf \mathbb{Z} , definiert durch

$$n R m \quad :\Leftrightarrow \quad n \mid m$$

ist: (2 Punkte)

- reflexiv
- transitiv
- symmetrisch
- antisymmetrisch

(d) Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwei Abbildung und ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv, dann muss auch gelten: (2 Punkte)

- f ist injektiv
- f ist surjektiv
- g ist injektiv
- g ist surjektiv

(e) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv? (2 Punkte)

- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 7n$
- $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto 1/n$
- $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, (n, m) \mapsto 2^n 4^m$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Q}, (n, m) \mapsto n/m$

(f) Für die Restklassenringe \mathbb{Z}_n gilt: (2 Punkte)

- \mathbb{Z}_8 ist ein Körper.
- \mathbb{Z}_7 ist ein nullteilerfreier Ring mit Eins.
- $[2]$ ist ein Nullteiler in \mathbb{Z}_6 .
- $[5]$ ist ein Nullteiler in \mathbb{Z}_6 .