StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Sommersemester 2021

(Stefan Haller)

2. Termin am 15. Jaenner 2022

von 10:00 bis 11:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in den Hörsälen 1, 4 und 14

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Arithmetik. (2 Punkte)

(b) Nach dem Satz von Euklid existieren unendlich viele Primzahlen. Gib einen Beweis dieses Satzes. (4 Punkte)

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^k = \frac{1+(2n+1)3^{n+1}}{4}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Seien $f_1, f_2 \colon X \to Y$ zwei Abbildungen und $g \colon Y \to Z$ eine injektive Abbildung mit $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Zeige, dass $f_1 = f_2$ gilt. (2 Punkte)

(b) Betrachte die Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$. Erkläre, warum keine Abbildung $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \circ h = \mathrm{id}$ existieren kann. (1 Punkt)

(c) Bezeichnen $\sigma, \tau, \rho \in \mathfrak{S}_5$ die drei Permutationen mit Zuordnungsvorschriften:

n	1	2	3	4	5
$\sigma(n)$	1	3	4	5	2
$\rho(n)$	2	3	4	1	5
$\tau(n)$	2	1	3	5	4

Bestimme eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_5$, für die

$$\sigma \circ \pi^{-1} \circ \tau = \rho$$

gilt und gib $\pi(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ an. (3 Punkte)

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{10}{(x-7)^2+1}.$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}([1,2))$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)

(b) Gib eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt. (1 Punkt)

(c) Gib eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt. (1 Punkt)

(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[5,6] \to [a,b]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$53 \cdot n + 3 \equiv 5 \mod 567$$

genügen.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 + 4\mathbf{i})z - 11 - 2\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. Bei jeder Frage ist mindestens eine Antwort richtig. Insgesamt sind zwölf Antworten korrekt. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl des Multiple-Choice-Teils negativ, wird auf Null aufgerundet.

(a) Welche der folgenden Mengengleichheiten gelten für alle Mengen X, Y und Z?
- ☐ $(X \setminus Y) \setminus Z) = X \setminus (Y \setminus Z)$
- ☐ $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$
- ☐ $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$
- ☐ $P(X \cup Y) = P(X) \cup P(Y)$

(b) Die Mengengleichheit $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt
- ☐ für alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ und alle Teilmengen $A, B \subseteq X$.
- ☐ für alle injektiven Abbildungen $f\colon X \to Y$ und alle Teilmengen $A, B \subseteq X$.
- ☐ für alle surjektiven Abbildungen $f\colon X \to Y$ und alle Teilmengen $A, B \subseteq X$.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- ☐ $\exists! n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$
- ☐ $\forall n, m \in \mathbb{Z} : (n \mid m \wedge m \mid n) \Rightarrow n = m$
- ☐ $\forall p \in \mathbb{P} : \forall a, b \in \mathbb{Z} : (p \mid ab \wedge p \nmid a) \Rightarrow (p \mid b)$
- ☐ $\forall a \in \mathbb{Z} : (3 \nmid a \vee 7 \nmid a) \Rightarrow 42 \nmid a$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{Q} : x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen.

(d) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv?
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n + 3$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (n + 1)(n - 1)$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n \cdot n$
- ☐ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$

(e) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

(f) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$n\, R\, m \quad :\Leftrightarrow \quad |m - n| \leq 3$$

ist:
- ☐ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(g) Welche der folgenden Mengen bilden mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe?
- ☐ $\{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Addition
- ☐ $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit der üblichen Multiplikation
- ☐ S^1 mit der üblichen Addition