StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Sommersemester 2021

(Stefan Haller)

3. Termin am 7. Februar 2022

von 10:00 bis 11:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in den Hörsälen 1, 4 und 14

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Arithmetik. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass 3 nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist. (4 Punkte)

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und sei $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y, d.h., $B_i \subseteq Y$ für jedes $i \in I$. Zeige, dass in dieser Situation

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

gilt. (4 Punkte)

(b) Gib eine Abbildung $f\colon X \to Y$ sowie zwei Teilmengen A_1 und A_2 von X an, für die

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$$

gilt. (2 Punkte)

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (2 + x)(4 - x).$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}([5, 8))$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)
(b) Gib eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt. (1 Punkt)
(c) Gib eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt. (1 Punkt)
(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[1, 4] \to [a, b]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$27 \cdot n + 5 \equiv 7 \mod 100$$

genügen.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 + 2\mathbf{i})z - 5 + 14\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. Bei jeder Frage ist mindestens eine Antwort richtig. Insgesamt sind zwölf Antworten korrekt. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl des Multiple-Choice-Teils negativ, wird auf Null aufgerundet.

(a) Die Aussage $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q))$ ist
- ☐ eine Tautologie
- ☐ eine Kontradiktion
- ☐ weder Tautologie noch Kontradiktion

(b) Welche der folgenden Mengengleichheiten gelten für alle Mengen X, Y und Z?
- ☐ $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
- ☐ $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$
- ☐ $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cap Z$
- ☐ $(X \setminus Y) \cap X = \emptyset$

(c) Für jede injektive Abbildung $f\colon X \to Y$ gilt:
- ☐ $\neg \exists x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))$
- ☐ $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \neq f(x_2)$
- ☐ $\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y$

(d) Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv?
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n + 3$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (n+1)(n-1)$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n \cdot n$
- ☐ $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(n, m) \mapsto 2n + 3m$

(e) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$a\,R\,b \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{Z} : 2a = 2b + 3n)$$

ist:
- ☐ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(f) Welche der folgenden Mengen bilden mit der angegebenen Verknüpfung eine Gruppe?
- ☐ $\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Addition
- ☐ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der üblichen Multiplikation
- ☐ $\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ mit der üblichen Addition

(g) Für die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ gilt:
- ☐ $\mathbb{Z}_5$ bildet bzgl. der Multiplikation von Restklassen eine Gruppe.
- ☐ $\mathbb{Z}_7$ ist ein nullteilerfreier Ring.
- ☐ $\mathbb{Z}_{15}$ ist ein Körper.