StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23

(Stefan Haller)

3. Termin am 6. Februar 2023

von 10:00 bis 11:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in Hörsaal 1

Name:	Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Achtung: Der 4. Antritt muss verpflichtend kommissionell erfolgen!

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Studienrechtliche Hinweise für Studierende

Eine Beurteilung ist nur zulässig, wenn:

- Sie korrekt zu dieser Prüfung angemeldet sind,
- Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen,
- Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis),
- Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden (Lehrveranstaltungsleiter*innen geben vor Beginn der Prüfung bekannt, welche Hilfsmittel verwendet werden dürfen).

Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit “nicht genügend” beurteilt.

Unterschrift der*des Studierenden

Ich bestätige, dass ich

- ordnungsgemäß angemeldet bin, die Prüfungsmodalitäten und den Ablauf der Prüfung und die studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis genommen habe,
- mich an die geltenden Gesetze und Verordnungen in Bezug auf COVID-19 (insb. Sicherheits- und Hygienebestimmungen) halte. Informationen zusammengefasst unter `https://studieren.univie.ac.at/info`

Datum Unterschrift Studierende*r

Besondere Vorkommnisse während der Prüfung

(Nur von der Lehrveranstaltungsleiter*in oder dem Aufsichtspersonal auszufüllen)

Beschreibung des Vorfalls (falls zu wenig Platz, bitte Rückseite verwenden):

Datum, Uhrzeit Unterschrift

Version 10-2021 (SL/P10 COVID)

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Arithmetik. (2 Punkte)

(b) Nach einem Satz von Euklid existieren unendlich viele Primzahlen. Gib einen Beweis dieses Satzes. (4 Punkte)

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k3^{k-1} = \frac{1 + (2n-1)3^n}{4}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort. (3 Punkte)

(b) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei surjektive Abbildung. Zeige, dass $g \circ f$ surjektiv ist. (3 Punkte)

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 6x + 7.$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}([2,\infty))$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)
(b) Gib eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt. (1 Punkt)
(c) Gib eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt. (1 Punkt)
(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[a,b] \to [-1,7]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$19 \cdot n + 41 \equiv 49 \mod 100$$

genügen.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 + 4\mathbf{i})z - 11 + 10\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. In jeder der sechs Gruppen (a)–(f) sind genau zwei Antworten richtig. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl einer Gruppe negativ, wird sie auf Null aufgerundet.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? (2 Punkte)

- ☐ $p \Rightarrow \neg p$
- ☐ $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- ☐ $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (2 Punkte)

- ☐ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge c \mid d) \Rightarrow ac \mid bd$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \mid b \Rightarrow (a+1) \mid (b+1)$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 4 \mid ab \Rightarrow (2 \mid a \wedge 2 \mid b)$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (3 \nmid a \wedge 3 \nmid b) \Rightarrow 3 \nmid ab$

(c) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$n \, R \, m \quad :\Leftrightarrow \quad n(n-1) \leq m(m-1)$$

ist: (2 Punkte)

- ☐ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(d) Welche der folgenden Gleichungen gelten für alle endlichen Mengen A und B? (2 Punkte)

- ☐ $|A \setminus B| = |A| - |B|$
- ☐ $|A \cap B| = |A| \cdot |B|$
- ☐ $|P(A)| = 2^{|A|}$
- ☐ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(e) Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv? (2 Punkte)

- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$
- ☐ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $(n, m) \mapsto n - m$
- ☐ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto 3^n 5^m$
- ☐ $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Q}$, $(n, m) \mapsto n/m$

(f) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? (2 Punkte)

- ☐ $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto 2n$
- ☐ $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n + 2$
- ☐ $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n^2$
- ☐ $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $n \mapsto 2^n$