StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Sommersemester 2022

(Stefan Haller)

4. Termin am 18. März 2022

von 10:00 bis 11:30 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in Hörsaal 1

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer Primzahl? Gib eine präzise Definition. (2 Punkte)

(b) Beweise die Eindeutigkeitsaussage im Fundamentalsatz der Arithmetik, d.h., zeige, dass die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig ist. (4 Punkte)

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)4^k = \frac{1+(3n+2)4^{n+1}}{9}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort, d.h., gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (3 Punkte)

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters seien A_1 und A_2 zwei Teilmengen von X. Zeige, dass in dieser Situation

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

gilt. (3 Punkte)

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}((-2,1])$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)

(b) Gib eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt. (1 Punkt)

(c) Gib eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt. (1 Punkt)

(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[2,5] \to [a,b]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$37 \cdot n + 5 \equiv 8 \mod 100$$

genügen.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 - 4\mathbf{i})z - 6 - 8\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. Bei jeder Frage ist mindestens eine Antwort richtig. Insgesamt sind zwölf Antworten korrekt. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl des Multiple-Choice-Teils negativ, wird auf Null aufgerundet.

(a) Die Aussage $(r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$ ist
- ☐ eine Tautologie
- ☐ eine Kontradiktion
- ☐ weder Tautologie noch Kontradiktion

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- ☐ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 4 \mid ab \Rightarrow (4 \mid a \vee 4 \mid b)$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 5 \mid ab \Rightarrow (5 \mid a \vee 5 \mid b)$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 6 \mid ab \Rightarrow (3 \mid a \vee 3 \mid b)$

(c) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$a \, R \, b \quad :\Leftrightarrow \quad (n-2)^3 \leq (m-2)^3$$

ist:
- ☐ reflexiv
- ☐ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(d) Für jede surjektive Abbildung $f \colon X \to Y$ gilt:
- ☐ $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
- ☐ $\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y$
- ☐ $\exists x \in X : \forall y \in Y : f(x) = y$
- ☐ $\exists y \in Y : \forall x \in X : f(x) = y$
- ☐ $f(X) = Y$

(e) Sind A, X, Y drei Mengen mit $A \subseteq X$ und $A \subseteq Y$, dann muss auch gelten:
- ☐ $A \subseteq X \cup Y$
- ☐ $A \subseteq X \cap Y$
- ☐ $A \subseteq X \setminus Y$
- ☐ $A \subseteq X \, \Delta \, Y$
- ☐ $A \subseteq X \times Y$

(f) Für die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ gilt:
- ☐ $\mathbb{Z}_7$ bildet bzgl. der Multiplikation von Restklassen eine Gruppe.
- ☐ $\mathbb{Z}_{14}$ ist ein nullteilerfreier Ring.
- ☐ $\mathbb{Z}_{17}$ ist ein Körper.