PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist. Zeige nun analog:

(a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.
(b) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.
(c) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.
(d) Das Produkt einer geraden Zahl und einer ganzen Zahl ist gerade.

Diese Beobachtungen lassen sich in folgenden Tabellen zusammenfassen:

$+$	gerade	ungerade
gerade	gerade	ungerade
ungerade	ungerade	gerade

$\cdot$	gerade	ungerade
gerade	gerade	gerade
ungerade	gerade	ungerade

Wo können wir in diesen Tabellen die Parität der Quadratzahlen ablesen?

Aufgabe 1.2. Zeige mit Hilfe einer Fallunterscheidung, dass das Quadrat einer (jeder) ganzen Zahl bei Division durch 5 Rest 0, 1 oder 4 liefert.

Aufgabe 1.3. Beweise folgende Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen d, a, b, c, x und y.

(a) Gilt $d \mid a$, dann auch $d \mid ax$.
(b) Gilt $d \mid a$ und $d \mid b$, dann auch $d \mid a + b$.
(c) Gilt $d \mid a$ und $d \mid b$, dann auch $d \mid ax + by$.
(d) Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, dann auch $a \mid c$.

Aufgabe 1.4. Bearbeite diese Aufgabe ohne technische Hilfsmittel.

(a) Verwende den Euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 1344 und 259 zu berechnen.
(b) Bestimme ganze Zahlen x und y mit $\mathrm{ggT}(1344, 259) = 1344x + 259y$.
(c) Existieren ganze Zahlen x und y, sodass $21 = 1344x + 259y$?
(d) Zeige, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die $12 = 1344x + 259y$ gilt. Hinweis: Finde einen Teiler der rechten Seite, der die linke Seite nicht teilt.

Aufgabe 1.5. Alice kauft Bob ein Buch um 3€ ab. Beide haben nur 21€-Münzen und 78€-Scheine (in unbegrenzter Zahl) bei sich. Erkläre, wie Alice und Bob die Bezahlung damit abwickeln können. Wäre dies auch möglich, wenn der Preis 15€ oder 5€ betrüge?

Aufgabe 1.6. Bestimme eine ganze Zahl n, sodass $59n$ bei Division durch 100 Rest 1 liefert. Hinweis: Wende den erweiterten Euklidischen Algorithmus auf 100 und 59 an, um ihren größten gemeinsamen Teiler darzustellen.

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (Sieb des Eratosthenes). Betrachte folgende Anordnung aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Streiche 1 von der Liste.
- Streiche alle echten Vielfachen von 2, d.h. alle außer 2.
- Streiche alle echten Vielfachen von 3, d.h. alle außer 3.
- Streiche alle echten Vielfachen von 5, d.h. alle außer 5.
- Streiche alle echten Vielfachen von 7, d.h. alle außer 7.

Erkläre, warum die verbleibenden Zahlen eine vollständige Liste aller Primzahlen zwischen 1 und 100 bilden. Genauer:

(a) Warum bleiben nur Primzahlen übrig?
(b) Warum fehlen keine Primzahlen?

Aufgabe 2.2. Betrachte die beiden Zahlen

$$n = 53^2 \cdot 61 \cdot 71^2 \qquad \text{und} \qquad m = 53 \cdot 59^6 \cdot 61^7 \cdot 67^5.$$

(a) Gib die Primfaktorzerlegungen von $n \cdot m$ und $\operatorname{ggT}(n, m)$ an.
(b) Gib die Primfaktorzerlegungen aller positiven Teiler von n an.
(c) Wieviele positive Teiler hat m?

Aufgabe 2.3. In der Vorlesung wurde auf zwei Arten bewiesen, dass 2 nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Zeige nun analog:

(a) 5 ist nicht das Quadrat einer rationalen Zahl. Führe diesen Beweis mit Hilfe des Lemma von Euklid.
(b) 7 ist nicht das Quadrat einer rationalen Zahl. Führe diesen Beweis mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 2.4. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 2.5. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt

$$2^n \geq n^2.$$

Hinweis: Verwende (und beweise) dazu $2n^2 \geq (n+1)^2$ für $n \geq 3$.

Aufgabe 2.6. Schreibe folgende Terme ohne Summen- oder Produktsymbol an:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$
(b) $\sum_{j=0}^{7} \big((-1)^j \frac{1}{2j+1}\big)$
(c) $\prod_{n=1}^{5} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right)$
(d) $\prod_{i=0}^{9} (2i+1)$
(e) $\sum_{k=0}^{5} \prod_{j=1}^{k} q$

Aufgabe 2.7. Stelle die folgenden Terme mit Hilfe der Summen- oder Produktschreibweise kompakt dar:

(a) $4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 34$
(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$
(c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$
(d) $2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + 9z^8$
(e) $2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \cdots + 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Aufgabe 2.8. Welche der folgenden Gleichungen sind für alle natürlichen $m, n, r_k \geq 0$ und alle reellen $c, a_k, b_{i,j}, x, y_i, z_j$ richtig und warum?

(a) $\prod_{k=1}^{n} c a_k = c \prod_{k=1}^{n} a_k$
(b) $\prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} b_{i,j}$
(c) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$.
(d) $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$
(e) $\prod_{k=1}^{n} x^{r_k} = x^{\sum_{k=1}^{n} r_k}$
(f) $\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i z_j$

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede reelle Zahl $q \neq 1$ und jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt die geometrische Summenformel

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Versuche auch, einen alternativen Beweis dieser Identität zu geben.

Aufgabe 3.2. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt die arithmetische Summenformel

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n + 1) = \sum_{k=0}^{n} (3k + 1) = \frac{(3n + 2)(n + 1)}{2}.$$

Versuche auch, einen alternativen Beweis dieser Identität zu geben.

Aufgabe 3.3. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Versuche auch, einen alternativen Beweis der Identität zu geben. Hinweis: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Aufgabe 3.4. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Summe der ersten $n \geq 1$ ungeraden Quadratzahlen durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$$

Aufgabe 3.5. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass $8^n - 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ durch 7 teilbar ist. Versuche auch, einen alternativen Beweis mit Hilfe der geometrischen Summenformel zu geben.

Aufgabe 3.6. Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

$$n! \geq 3^n$$

Setze zunächst kleine Werte für n ein und stelle eine Vermutung auf. Beweise diese Vermutung anschließend mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 3.7. Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ wurden die Binomialkoeffizienten in der Vorlesung durch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert.

(a) Zeige $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-k+1}{1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} (n + 1 - j)$ für $0 \leq k \leq n$.
(b) Zeige $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ für $1 \leq k \leq n$.
(c) Zeige $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$. Wie spiegelt sich dies im Pascalschen Dreieck wider?
(d) Zeige $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ für $1 \leq n$.

(e) Zeige $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$ für $2 \leq n$.

Aufgabe 3.8. Sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl.

(a) Verwende den binomischen Lehrsatz, um $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ zu zeigen.

(b) Berechne analog $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. Vorsicht im Fall $n = 0$.

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)

zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. In der folgenden Tabelle sind in den mit 1 bis 16 bezeichneten Spalten alle möglichen Wahrheitswertverläufe von Aussagen angegeben, die aus zwei Teilaussagen p und q zusammengesetzt sind:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f	f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w
f	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f	f	f	f	f	w	w	w	w	w	w	w	w

In der Vorlesung wurden die Wahrheitswertverläufe folgender Aussagen angegeben:

$$
\begin{array}{ccccc}
p \wedge q & p \vee q & \neg p & p \wedge \neg p & p \vee \neg p \\
\neg p \vee \neg q & \neg p \wedge \neg q & \neg p \vee q & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) &
\end{array}
$$

Ordne diese Aussagen den entsprechenden Spalten in der Tabelle oben zu. Finde zusammengesetzte Aussagen mit Wahrheitswertverläufen, die den verbleibenden Spalten entsprechen. Verwende dabei nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$, um p und q zu verbinden.

Aufgabe 4.2. Seien p und r zwei falsche Aussagen und q eine wahre Aussage. Bestimme den Wahrheitswert folgender zusammengesetzter Aussagen:

(a) $((p \Rightarrow q) \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$
(b) $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
(c) $((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee (q \Rightarrow r))$
(d) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r))$

Gib auch Wahrheitswerte für p, q, r an, sodass die Aussagen in (a) und (c) verschiedene Wahrheitswerte annehmen.

Aufgabe 4.3. Zeige mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

(a) $\big((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
(b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$
(c) $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$
(d) $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q))$

Aufgabe 4.4. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche keines von beiden?

(a) $(p \wedge p) \Leftrightarrow \neg p$
(b) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$
(c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$
(d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r))$

Aufgabe 4.5. Formuliere mit Hilfe von Quantoren und Junktoren:

(a) Die Gleichung $x^2 = 13$ besitzt keine rationale Lösung.
(b) Für jedes reelle a besitzt die Gleichung $x^3 = a$ genau eine reelle Lösung x.

(c) Die Gleichung $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x = 1$ besitzt mindestens zwei reelle Lösungen.
(d) Für jedes reelle a besitzt die Gleichung $\arctan(x) = a$ höchstens eine reelle Lösung.

Versuche auch, (mit Schulwissen) zu begründen, warum diese Aussagen alle wahr sind.

Aufgabe 4.6. Verwende die Kontraposition, um folgende Aussagen äquivalent umzuformulieren.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$
(b) $\forall n \in \mathbb{Z} : n \nmid 5 \Rightarrow n \nmid 15$
(c) $\forall n \in \mathbb{Z} : 6 \mid 7n \Rightarrow 6 \mid n$
(d) $\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid n \Rightarrow (n = 0 \vee n \geq 7)$
(e) $\forall n \in \mathbb{Z} : (3 \nmid n \vee 5 \nmid n) \Rightarrow 60 \nmid n$

Welche dieser Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe die Antwort und bilde die Negation.

Aufgabe 4.7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch. Begründe die Antwort und bilde die Negation.

(a) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall n \in \mathbb{Z} : n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)$
(b) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall n \in \mathbb{N} : n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)$
(c) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall a, b \in \mathbb{Z} : (p \nmid a \wedge p \nmid b) \Rightarrow p \nmid ab$
(d) $\forall p, q \in \mathbb{P} : p \mid q \Rightarrow p = q$
(e) $\forall p, q \in \mathbb{P} : \exists x, y \in \mathbb{Z} : px + qy = 1$
(f) $\forall p, q \in \mathbb{P} : \exists x, y \in \mathbb{Z} : (p \neq q) \Rightarrow px + qy = 1$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ die Menge aller Primzahlen.

Aufgabe 4.8. Bestimme alle rellen Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $2x = \sqrt{3x^2 + 1}$
(b) $(x - 1)(e^x + 1) = 2(x - 1)$
(c) $(x^2 + 1)^{100} = (x^2 - 3)^{100}$

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)

zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1. Betrachte die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3, 6\} \quad \text{und} \quad C = \{1, 3, 4, 7\}.$$

(a) Berechne $A \cup B$, $A \cap B$, $A \,\Delta\, B$, $P(A \cap B)$ und $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$.

(b) Berechne $((A \cap B) \cup C) \,\Delta\, (A \cap (B \cup C))$ und $((A \setminus B) \setminus C) \,\Delta\, (A \setminus (B \setminus C))$.

(c) Wie können die Mengen A, B und C mit den Operationen $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ so verbunden werden, dass wir $\{2, 3, 4\}$ erhalten?

Aufgabe 5.2. Seien $a < c < b < d$ reelle Zahlen. Beschreibe jede der folgenden Mengen als Intervall oder als möglichst einfache Vereinigung von Intervallen.

(a) $[a, b] \cap [c, d]$

(b) $[a, b] \cup [c, d]$

(c) $[a, b] \setminus [c, d]$

(d) $[a, b] \,\Delta\, [c, d]$

(e) $[a, b]^c$, wobei das Komplement in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

(f) $([a, b] \,\Delta\, [c, d])^c$, wobei das Komplement in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

Fertige Skizzen an, die diese Berechungen plausibel machen. Beachte die Notationskollision in den letzten beiden Punkten: Einerseits bezeichnet c dort eine Intervallgrenze und andererseits auch das Komplement. Trotzdem sollte klar sein, was hier gemeint ist.

Aufgabe 5.3. Seien A, B und C drei Mengen. Gib für jede der folgenden Identitäten zwei Beweise: einen durch Rückführung auf eine logische Äquivalenz und einen zweiten mit Hilfe einer Mengentafel.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Versuche auch, diese Identitäten mit Hilfe von Venn-Diagrammen zu beweisen.

Aufgabe 5.4. Welche der folgenden Identitäten gelten für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort, d.h., gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

(b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(c) $(A \cup B) \,\Delta\, (A \cup C) = A \cup (B \,\Delta\, C)$

(d) $(A \cup B) \,\Delta\, (A \cup C) = (B \,\Delta\, C) \setminus A$

Aufgabe 5.5. Gib Beispiele von Mengen A, B und C an, die zeigen, dass folgende Identitäten i.A. falsch sind.

(a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Bei beiden Punkt kann jedoch das Gleichheitszeichen durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ so ersetzt werden, dass die resultierende Inklusion für beliebige Mengen A, B und C wahr ist. Gib an, welche Inklusion jeweils gilt und beweise sie.

Aufgabe 5.6. Sei A eine Menge und $(B_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie. Zeige:

(a) $A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$
(b) $A \setminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i)$

Aufgabe 5.7. Beschreibe die folgenden Mengen als Intervalle. Strenge Beweise sind hier nicht verlangt.

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}(\frac{1}{n}, n)$
(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}(1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{n})$
(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}(1-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n})$
(d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}(1-\frac{1}{n}, 1)$

Aufgabe 5.8. Wieviele Elemente haben folgende Mengen?

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : 3 \leq |x-7| \leq 5\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 3 \leq x^2+y^2 \leq 10\}$
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9\}$

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 6

AUFGABE 6.1. Skizziere den Graphen der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

und verwende (Schul)wissen über ihr Monotonieverhalten, um folgende Fragen zu beantworten. Strenge Beweise sind nicht verlangt.

(a) Berechne $f(A)$, wobei $A = (-1, 2)$.
(b) Berechne $f([2,3))$, $f([-4,-3))$, $f((5,\infty))$ und $f((-\infty, 6])$.
(c) Berechne $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(1/2)$.
(d) Berechne $f^{-1}(B)$, wobei $B = (-1, 5]$.
(e) Berechne $f^{-1}((0,1))$, $f^{-1}([2,3])$, $f^{-1}([-1,1/2))$ und $f^{-1}((1/2,2))$.
(f) Gib eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(C)) \neq C$ gilt.
(g) Gib eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(D)) \neq D$ gilt.

AUFGABE 6.2. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subseteq X$ zwei Teilmengen von X und $B_1, B_2 \subseteq Y$ zwei Teilmengen von Y. Zeige:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

AUFGABE 6.3. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y, d.h., $A_i \subseteq X$ und $B_i \subseteq Y$ für alle $i \in I$. Zeige:

(a) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
(b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Gib eine Abbildung f und eine Mengenfamilie $(A_i)_{i\in I}$ an, für die in (b) strikte (echte) Inklusion gilt.

AUFGABE 6.4. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 3n+1$
(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n \cdot n$
(c) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a,b) \mapsto 2^a \cdot 3^b$
(d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$
(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

AUFGABE 6.5. Sei $f\colon W \to X$ eine surjektive Abbildung und $h\colon Y \to Z$ eine injektive Abbildung. Weiters seien $g_1, g_2\colon X \to Y$ zwei Abbildungen, sodass $h \circ g_1 \circ f = h \circ g_2 \circ f$. Zeige $g_1 = g_2$.

AUFGABE 6.6. Zeige, dass folgende Abbildungen wohldefinierte Bijektionen sind und gib ihre Umkehrabbildungen an.

(a) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x+3$
(b) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{3}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $g(x) = \frac{2x+5}{3x+7}$

(c) $h\colon [0,3] \to [2,11]$, $h(x) = 2 + (x-3)^2$

Aufgabe 6.7.

(a) Gib reelle Zahlen a und b an, sodass $[a,b] \to [6,9]$ $x \mapsto (x-2)^2 + 5$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.

(b) Gib reelle Zahlen c und d an, sodass $[2,3] \to [c,d]$, $x \mapsto \frac{1}{4+5x^2}$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.

(c) Gib reelle Zahlen e und f an, sodass $\mathbb{R} \setminus \{e\} \to \mathbb{R} \setminus \{f\}$, $x \mapsto \frac{3+x}{2-x}$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.

Aufgabe 6.8. Betrachte die vier Bijektionen $\sigma, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{34}\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ mit Abbildungsvorschriften:

n	1	2	3	4
$\sigma(n)$	2	3	4	1
$\tau_{12}(n)$	2	1	3	4
$\tau_{23}(n)$	1	3	2	4
$\tau_{34}(n)$	1	2	4	3

(a) Je zwei der folgenden zwölf Abbildungen stimmen überein. Ordne sie entsprechend zu.

$\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34}$	$\sigma \circ \sigma$	$\sigma^{-1} \circ \sigma^{-1}$	τ_{23}
$\sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}$	σ	σ^{-1}	$\tau_{34} \circ \tau_{23} \circ \tau_{12}$
$\tau_{12} \circ \tau_{12}$	$\tau_{12} \circ \tau_{23}$	$\mathrm{id}_{\{1,2,3,4,\}}$	$(\tau_{23} \circ \tau_{12})^{-1}$

(b) Gib die Abbildungsvorschrift einer Bijektion $\rho\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ an, für die gilt:

$$\rho \circ \tau_{23} = \tau_{23} \circ \sigma$$

(c) Gib die Abbildungsvorschrift einer Bijektion $\pi\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ an, für die gilt:

$$\sigma \circ \pi^{-1} \circ \tau_{12} = \tau_{34}$$

PUE StEOP: Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250056 PUE)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Welche der folgenden Relationen sind Ordnungsrelationen und welche sogar Totalordnungen? Begründe die Antwort.

(a) Relation $\trianglelefteq$ auf $\mathbb{R}$, $x \trianglelefteq y :\Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
(b) Relation $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{Z}$, $a \sqsubseteq b :\Leftrightarrow 2a + 3 \leq 2b + 3$
(c) Relation $\preceq$ auf $\mathbb{R}^X$, $f \preceq g :\Leftrightarrow (\forall x \in X : f(x) \leq g(x))$, wobei X eine Menge bezeichnet.
(d) Relation $\ll$ auf $\mathbb{N}_+$, $a \ll b :\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : 10^n \mid a \Rightarrow 10^n \mid b)$
(e) Mengeninklusion $\subseteq$ auf $\{(-a, a) : a > 0\} \subseteq P(\mathbb{R})$

Aufgabe 7.2. Welche der folgenden Abbildungen sind bzgl. der angegebenen Ordnungsrelationen (streng) monoton wachsend oder fallend?

(a) $(\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$, $x \mapsto x + 1$
(b) $(\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
(c) $(\mathbb{N}_+, \mid) \to (\mathbb{N}_+, \mid)$, $n \mapsto n + 2$
(d) $(\mathbb{N}_+, \mid) \to (\mathbb{N}_+, \mid)$, $n \mapsto 3n$
(e) $(\mathbb{N}_+, \mid) \to (\mathbb{N}_+, \mid)$, $n \mapsto n^2$
(f) $(\mathbb{N}, \leq) \to (P(\mathbb{N}), \subseteq)$, $n \mapsto \{0, 1, 2, \dots, n\}$
(g) $(P(X), \subseteq) \to (P(X), \subseteq)$, $A \mapsto A \cap B$, wobei B eine Teilmenge von X bezeichnet.
(h) $(P(X), \subseteq) \to (P(X), \subseteq)$, $A \mapsto A^c$, wobei das Komplement in X gemeint ist.

Aufgabe 7.3.

(a) Zeige, dass die identische Abbildung $(\mathbb{N}_+, \mid) \to (\mathbb{N}_+, \leq)$, $n \mapsto n$ eine streng monotone Bijektion ist, deren Umkehrabbildung nicht monoton ist.
(b) Seien $(X, \preceq)$ und $(Y, \sqsubseteq)$ zwei totalgeordnete Mengen und $f\colon X \to Y$ eine (streng) monotone Bijektion. Zeige, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ streng monoton ist.

Aufgabe 7.4. Sei $(Y, \sqsubseteq)$ eine geordnete Menge und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Betrachte die Relation $\preceq$ auf X

$$x_1 \preceq x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$$

und zeige:

(a) I.A. ist $\preceq$ keine Ordnungsrelation auf X.
(b) Für injektives f ist $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf X.
(c) Ist f injektiv und $\sqsubseteq$ eine Totalordnung auf Y, dann ist $\preceq$ eine Totalordnung auf X.

Aufgabe 7.5. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründe die Antwort.

(a) Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$, $a \sim b :\Leftrightarrow b - a$ ungerade.
(b) Relation $\approx$ auf $\mathbb{R}$, $a \approx b :\Leftrightarrow |b - a| < 1$.
(c) Relation $\simeq$ auf $\mathbb{Z}$, $a \simeq b :\Leftrightarrow |b - a| < 1$.
(d) Relation $\cong$ auf $P(X)$, $A \cong B :\Leftrightarrow A \,\Delta\, B = \emptyset$
(e) Relation $\equiv$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \equiv g :\Leftrightarrow (\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \geq a : f(x) = g(x))$

AUFGABE 7.6. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Zeige, dass

$$x_1 \approx x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) \sim f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf X definiert. Für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ zeige weiters:

$$[x]_{\approx} = f^{-1}\big([f(x)]_{\sim}\big)$$

AUFGABE 7.7. Welche der folgenden Restklassen sind invertierbar? Bestimme gegebenenfalls die Inversen.

(a) $[19] \in \mathbb{Z}_{71}$
(b) $[39] \in \mathbb{Z}_{221}$
(c) $[51] \in \mathbb{Z}_{214}$

AUFGABE 7.8.

(a) Löse die Gleichung

$$[27] \cdot x + [16] = [8]$$

in $\mathbb{Z}_{47}$ und gib die Lösungen in der Form $x = [a]$ mit $0 \leq a < 47$ an.

(b) Gib alle ganzen Zahlen n an, die folgender Kongruenz genügen:

$$37 \cdot n + 6 \equiv 9 \mod 100$$

(c) Gib alle ganzen Zahlen m an, die folgender Kongruenz genügen:

$$83 \cdot m + 42 \equiv 12 \cdot m + 45 \mod 200$$