LÖSUNGEN

StEOP Modulprüfung (25-0357)

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23

(Stefan Haller)

Probeprüfung im Dezember 2022

Name:	Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Achtung: Der 4. Antritt muss verpflichtend kommissionell erfolgen!

erreichte Punktezahl								
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	MC	gesamt
Punkte:								

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Studienrechtliche Hinweise für Studierende

Eine Beurteilung ist nur zulässig, wenn:

- Sie korrekt zu dieser Prüfung angemeldet sind,
- Sie die Voraussetzungen zu dieser Prüfung erfüllen,
- Ihre Identität eindeutig festgestellt werden kann (Studierendenausweis bzw. weiterer amtlicher Lichtbildausweis),
- Sie keine unerlaubten Hilfsmittel verwenden (Lehrveranstaltungsleiter*innen geben vor Beginn der Prüfung bekannt, welche Hilfsmittel verwendet werden dürfen).

Bei einem Abbruch der Prüfung ohne wichtigen Grund wird die Prüfung mit "nicht genügend" beurteilt.

Unterschrift der*des Studierenden

Ich bestätige, dass ich

- ordnungsgemäß angemeldet bin, die Prüfungsmodalitäten und den Ablauf der Prüfung und die studienrechtlichen Hinweise zur Kenntnis genommen habe,
- mich an die geltenden Gesetze und Verordnungen in Bezug auf COVID-19 (insb. Sicherheits- und Hygienebestimmungen) halte. Informationen zusammengefasst unter `https://studieren.univie.ac.at/info`

Datum Unterschrift Studierende*r

Besondere Vorkommnisse während der Prüfung

(Nur von der Lehrveranstaltungsleiter*in oder dem Aufsichtspersonal auszufüllen)

Beschreibung des Vorfalls (falls zu wenig Platz, bitte Rückseite verwenden):

Datum, Uhrzeit Unterschrift

Version 10-2021 (SL/P10 COVID)

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer Primzahl? Gib eine präzise Definition. (2 Punkte)

(b) Beweise die Eindeutigkeitsaussage im Fundamentalsatz der Arithmetik, d.h., zeige, dass die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig ist. (4 Punkte)

vgl. VO 10. Oktober

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)4^k = \frac{1+(3n+2)4^{n+1}}{9}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt.

Induktionsanfang, $n=0$:

$$\sum_{k=0}^{0}(k+1)4^k = (0+1)4^0 = 1 = \frac{1+(3\cdot 0+2)4^{0+1}}{9}$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)4^k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)4^k + ((n+1)+1)4^{n+1}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} \frac{1+(3n+2)4^{n+1}}{9} + (n+2)4^{n+1}$$

$$= \frac{1+(3n+2)4^{n+1}+9(n+2)4^{n+1}}{9}$$

$$= \frac{1+(12n+20)4^{n+1}}{9}$$

$$= \frac{1+(3n+5)4^{n+2}}{9}$$

$$= \frac{1+(3(n+1)+2)4^{(n+1)+1}}{9}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Gilt die Mengengleichheit

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$$

für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort. (3 Punkte)

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters seien A_1 und A_2 zwei Teilmengen von X. Zeige, dass in dieser Situation

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

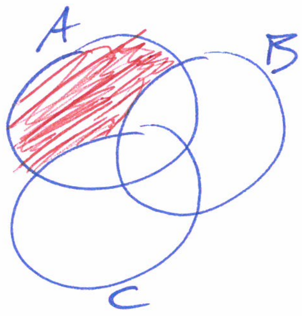
gilt. (3 Punkte)

a) Nein!

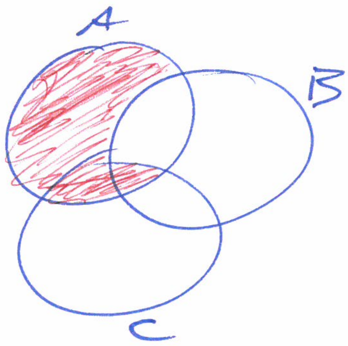
$A = C = \{1\}, \; B = \emptyset$

$(A\setminus B)\setminus C = A \setminus C = \emptyset$ $\neq$

$A\setminus(B\setminus C) = A \setminus \emptyset = A$



$(A\setminus B)\setminus C$



$A\setminus(B\setminus C)$

b) $\cancel{x}\, y \in f(A_1 \cup A_2) \iff \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y$

$\iff \exists x : (x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge f(x) = y$

$\boxed{(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)}$

$\iff \exists x : (x \in A_1 \wedge f(x) = y) \vee (x \in A_2 \wedge f(x) = y)$

$\boxed{\text{vgl. VO 28.10. p. 19}}$

$\iff (\exists x : x \in A_1 \wedge f(x) = y) \vee (\exists x : x \in A_2 \wedge f(x) = y)$

$\iff (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2))$

$\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

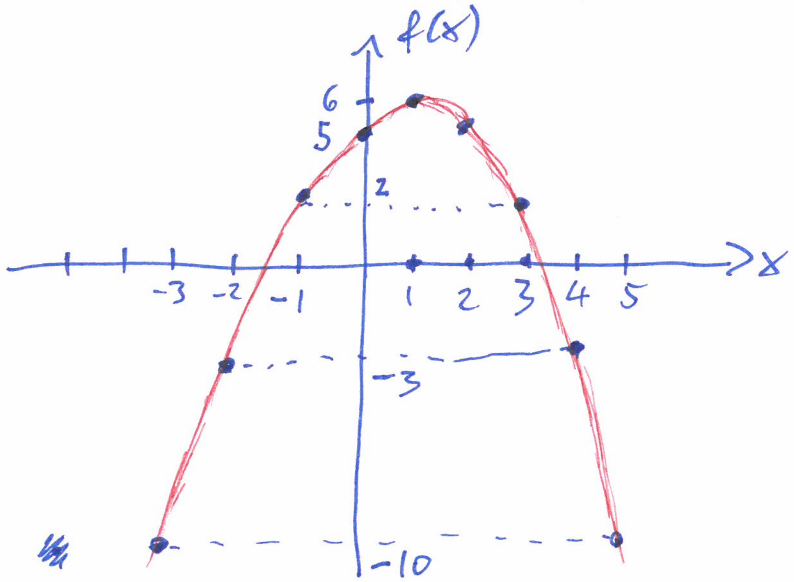
$$f(x) = -x^2 + 2x + 5.$$

(a) Gib das Urbild $f^{-1}((2,7])$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an. (1 Punkt)

(b) Gib eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt. (1 Punkt)

(c) Gib eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt. (1 Punkt)

(d) Ermittle reelle Zahlen a und b, für die die Einschränkung $[a,b] \to [2,6]$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Bijektion ist, und gib die Umkehrabbildung dieser Einschränkung inkl. Definitions- und Zielmenge an (3 Punkte).



x	f(x)
1	6
0, 2	5
-1, 3	2
-2, 4	-3
-3, 5	-10

a) $f^{-1}((2,7]) = (-1,3)$

b) etwa $B = \mathbb{R}$, $B = \{7\}$ bzw jedes B, das nicht zur Gänze in $(-\infty, 6]$ liegt.

c) etwa $A = \mathbb{R}$, $A = \{[illegible]\}$ bzw jedes A, das symmetrisch um 1 liegt.

d) Entweder $a = 1$, $b = 3$

$f^{-1}: [2,6] \to [1,3]$, $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{6-y}$

Oder $a = -1$, $b = [illegible]$

$f^{-1}: [2,6] \to [-1,1]$, $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{6-y}$

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gib alle ganzen Zahlen n an, die der Kongruenz

$$53 \cdot n - 1 \equiv 2 \mod 100$$

genügen.

erw. Euklidischen Algorithmus

$\rightsquigarrow \quad 1 = -9 \cdot 100 + 17 \cdot 53$

$[53]^{-1} = [17]$ in $\mathbb{Z}_{100}$

$[53] \cdot x - [1] = [2]$

$\Leftrightarrow \quad [53] \cdot x = [3]$

$\Leftrightarrow \quad x = [53]^{-1} \cdot [3]$

$= [17] \cdot [3] = [51]$

$\underline{n = 51 + 100 \cdot k \quad , k \in \mathbb{Z}}$

6. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 - 4\mathbf{i})z - 11 - 10\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an.

$$z = 1-2i \pm \sqrt{(1-2i)^2+11+10i}$$

$$= 1-2i \pm \sqrt{8+6i}$$

$$= 1-2i \pm \left(\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{8^2+6^2}+8}{2}}}_{3} + i \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{8^2+6^2}-8}{2}}}_{1} \right)$$

$$= 1-2i \pm (3+i)$$

$$\underline{z_1 = 4-i}$$

$$\underline{z_2 = -2-3i}$$

Multiple Choice (12 Punkte)

Kreuze die zutreffenden Antworten an. In jeder der sechs Gruppe (a)–(f) sind genau zwei Antworten richtig. Jedes richtig gesetzte Kreuz zählt einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Ist die Gesamtpunktezahl einer Gruppe negativ, wird sie auf Null aufgerundet.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? (2 Punkte)

- ☒ $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$
- ☐ $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
- ☒ $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (2 Punkte)

- ☐ $\forall a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a(a+1)$
- ☒ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (7 \nmid a \wedge 7 \nmid b) \Rightarrow 7 \nmid ab$
- ☐ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (6 \nmid a \wedge 6 \nmid b) \Rightarrow 6 \nmid ab$
- ☒ $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (5 \mid ab \wedge 5 \nmid b) \Rightarrow 5 \mid a$

(c) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$n \, R \, m \quad :\Leftrightarrow \quad n^2 \leq m^2$$

ist: (2 Punkte)

- ☒ reflexiv
- ☒ transitiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch

(d) Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $g\colon Y \to Z$ eine Bijektion, dann muss auch gelten: (2 Punkte)

- ☒ $g \circ f$ ist injektiv
- ☐ $g \circ f$ ist surjektiv
- ☐ f ist surjektiv
- ☒ g ist surjektiv

(e) Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv? (2 Punkte)

- ☒ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 3x$
- ☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x, x)$
- ☒ $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$

(f) Für die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ gilt: (2 Punkte)

- ☐ $\mathbb{Z}_4$ ist ein Körper.
- ☒ $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ bildet bzgl. der Multiplikation von Restklassen eine Gruppe.
- ☐ $\mathbb{Z}_6$ ist ein nullteilerfreier Ring.
- ☒ $\mathbb{Z}_7$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.