Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250032)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsaufgaben zu Abschnitt 1

Teilbarkeit, Euklidischer Algorithmus, Primzahlen, vollständige Induktion, Binomialkoeffizienten, binomischer Lehrsatz

Aufgabe 1.1. Sei a eine ganze Zahl, die bei Division durch 17 Rest 12 liefert und sei b eine weitere ganze Zahl, die bei Division durch 17 Rest 13 liefert.

(a) Zeige, dass $a+b$ bei Division durch 17 Rest 8 liefert.
(b) Welchen Rest liefert ab bei Division durch 17?

Aufgabe 1.2.

(a) Zeige: Das Produkt dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist stets durch 3 teilbar.
(b) Zeige: Die Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist stets durch 3 teilbar.
(c) Welchen Rest liefert die (jede) Summe von sechs aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen nach Division durch 6?

Aufgabe 1.3. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile alle natürlichen Zahlen n von -3 bis 15 und zeigt in der zweiten Zeile den Rest von n^2 nach Division durch 12.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rest von n^2	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9

Überprüfe die Tabelle und beobachte:

(a) Die Reste wiederholen sich mit Periode 6.
(b) Die Reste sind reflexionssymmetrisch um $n=6$ angeordnet.
(c) Die Reste sind reflexionssymmetrisch um $n=3$ angeordnet.

Zeige, dass (a), (b) und (c) für alle ganzen Zahlen, auch außerhalb des hier angeführten Bereichs, richtig bleiben.

Aufgabe 1.4. Seien a und b ganze Zahlen. Zeige, dass a^2+b^2 nach Division durch 4 Rest 0, 1 oder 2 liefert. Verwende dies, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$a^2+b^2=4003$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

Aufgabe 1.5. Verwende den Euklidischen Algorithmus, um festzustellen, ob 2173 und 2021 teilerfremd sind. Ebenso mit 4891 und 5561.

Aufgabe 1.6. Kürze den Bruch $\frac{3869}{3431}$ soweit wie möglich und verwende dabei den Euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner zu bestimmen. Ebenso mit $\frac{5963}{7921}$ und $\frac{2987}{103}$.

Aufgabe 1.7. Bestimme ganze Zahlen x und y, die folgende Gleichung lösen:

$$1=787x+244y$$

Aufgabe 1.8. Zeige, dass keine ganzen Zahlen x und y existieren, für die gilt:

$$1=2961x+2367y$$

Aufgabe 1.9. Bestimme eine ganze Zahl n, sodass $22n$ nach Division durch 101 Rest 1 liefert. Hinweis: Wende den erweiterten Euklidischen Algorithmus auf 101 und 22 an, um ihren größten gemeinsamen Teiler darzustellen.

Aufgabe 1.10. Seien a, b, c drei ganze Zahlen, sodass $a \mid bc$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeige, dass dann auch $a \mid c$ gelten muss. Hinweis: Gehe wie im Beweis des Lemma von Euklid vor.

Aufgabe 1.11. Bezeichne p_i die i-te Primzahl, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …und sei

$$N_k := p_1 p_2 \cdots p_k + 1,$$

also etwa $N_3 = p_1 p_2 p_3 + 1$. Sind die Zahlen N_k alle prim? Überprüfe $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 1.12. Sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$N_k := k! + 1$$

wenigstens einen Primteiler besitzt, der größer als k ist. Hinweis: Gehe wie im Beweis des Satzes von Euklid vor.

Aufgabe 1.13.

(a) Gib eine natürliche Zahl n an, für die $n(n-1) + 41$ nicht prim ist. (ohne Hilfsmittel)
(b) Finde die kleinste natürliche Zahl n, für die $n(n-1)+41$ nicht prim ist. (mit Hilfsmittel)

Aufgabe 1.14 (Mersennsche Primzahlen).

(a) Zeige: Für alle natürliche Zahlen $m, n \geq 1$ gilt

$$2^{nm} - 1 = (2^m - 1)\big(1 + 2^m + 2^{2m} + \cdots + 2^{(n-1)m}\big).$$

Hinweis: Ausmultiplizieren oder geometrische Summenformel verwenden.

(b) Zeige: Ist p eine natürliche Zahl und

$$M_p := 2^p - 1$$

Primzahl, dann muss p prim sein. Hinweis: Führe einen indirekten Beweis und verwende den ersten Teil der Aufgabe: Wäre p zusammengesetzt, dann …

(c) Überprüfe für die ersten sechs Primzahlen p, ob M_p prim ist. (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1.15.

(a) Zeige, dass 887 nicht Quadrat einer rationalen Zahl ist.
(b) Zeige, dass keine Primzahl Quadrat einer rationalen Zahl sein kann.
(c) Zeige, dass 899 nicht Quadrat einer rationalen Zahl ist.
(d) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeige, dass pq nicht Quadrat einer rationalen Zahl ist. Arbeite genau heraus, an welcher Stelle eingeht, dass p und q verschieden sind.
(e) Zeige, dass 828 nicht Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Aufgabe 1.16. Bestimme die Primfaktorzerlegungen von 60 und 150 und verwende sie bei der Bearbeitung folgender Punkte:

(a) Gib alle Teiler von 60 an.
(b) Gib alle Teiler von 150 an.
(c) Gib alle gemeinsamen Teiler von 60 und 150 an.
(d) Bestimme damit $\mathrm{ggT}(60, 150)$.

Ebenso mit 54587 und 71383.

Aufgabe 1.17. Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Summe der ersten n positiven geraden Zahlen und beweise diese Formel mittels vollständiger Induktion nach n.

Aufgabe 1.18. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jedes natürliche $n \geq 1$ gilt

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n.$$

Aufgabe 1.19. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede reelle Zahl $q \neq 1$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + nq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

Aufgabe 1.20. Sei $a \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass $a^n - 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ durch $a - 1$ teilbar ist. Versuche auch, einen alternativen Beweis mit Hilfe der geometrischen Summenformel zu geben.

Aufgabe 1.21. Beweise die arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} (a + dk) = \frac{(2a + dn)(n+1)}{2} = a(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 1.22. Die Zahlenfolge a_n sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2, \qquad a_1 := 1, \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := a_n + 2a_{n-1}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die nächsten Zahlen lauten daher: $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 17$, $a_5 = 31$, $a_6 = 65$. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt

$$a_n = 2^n + (-1)^n.$$

Aufgabe 1.23. Die Fibonacci-Zahlen F_n werden rekursiv wie folgt definiert:

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen lauten daher: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ Bezeichnen

$$\varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{und} \qquad \psi := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$. Zeige

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

mittels vollständiger Induktion nach n. Hinweis: Überprüfe für den Induktionsanfang $n = 0$ und $n = 1$. Verwende im Induktionsschritt die Gleichungen $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\psi^2 = \psi + 1$.

Aufgabe 1.24. (a) Verwende den Euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler der Fibonacci-Zahlen $F_9 = 34$ und $F_8 = 21$ zu berechnen.
(b) Bestimme analog den größten gemeinsamen Teiler von $F_{16} = 987$ und $F_{15} = 610$.
(c) Wieviele Schritte (Divisionen) sind notwendig, um den größten gemeinsamen Teiler der Fibonacci-Zahlen F_n und F_{n-1} mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus zu bestimmen?

Aufgabe 1.25. Für natürliches $n \geq 1$ zeige

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = \prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n n! \qquad \text{und} \qquad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Aufgabe 1.26. Berechne $\binom{7}{3}$ mit dem Pascalschen Dreieck. Schreibe dabei nur jenen Teil des Dreiecks an, der für die Berechnung dieses Binomialkoeffizienten notwendig ist. Berechne $\binom{7}{3}$ auch mit der geschlossenen Darstellung.

Aufgabe 1.27. Verwende den binomischen Lehrsatz, um die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für reelle $x \geq 0$ und natürliche $n \geq 0$ zu zeigen. Zeige, dass auch die stärkere Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

für diese x und n gilt.

Aufgabe 1.28. Für welche reellen Zahlen $x \geq -1$ und welche natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt die strikte Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + nx?$$

Begründe die Antwort.

Aufgabe 1.29. Zeige mittels vollständiger Induktion: Für jedes natürliche $n \geq 0$ gilt

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \leq 4^n.$$

Versuche auch, einen alternativen Beweis mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zu geben.

Aufgabe 1.30 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten). Für reelle x und natürliche $k \geq 0$ wird der verallgemeinerte Binomialkoeffizient $\binom{x}{k}$ wie folgt definiert:

$$\binom{x}{k} := \frac{x}{k} \cdot \frac{x-1}{k-1} \cdot \frac{x-2}{k-2} \cdots \frac{x-k+1}{1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{x-j}{k-j} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x-j)$$

Im Fall $k = 0$ ist dies als $\binom{x}{0} = 1$ zu lesen ist.

(a) Erkläre, warum dies für natürliches x und $0 \leq k \leq x$ mit der Definition der Vorlesung übereinstimmt.
(b) Zeige $\binom{x}{1} = x$, $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$, $\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ und $\binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$.
(c) Berechne $\binom{3}{5}$ und zeige anschließend $\binom{n}{k} = 0$ für alle natürliche $0 \leq n < k$.
(d) Berechne $\binom{-1}{5}$ und zeige anschließend $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ für jedes $k \geq 0$.
(e) Berechne $\binom{1/2}{3}$ und $\binom{1/2}{4}$.
(f) Zeige $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}$ für $k \geq 1$.
(g) Zeige $\binom{x}{k} = \frac{x}{k}\binom{x-1}{k-1}$ für $k \geq 1$.

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250032)

zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsaufgaben zu Abschnitt 2

Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Umgang mit Gleichungen

Aufgabe 2.1. Seien p, r zwei wahre Aussagen und q, s zwei falsche Aussagen. Bestimme den Wahrheitswert folgender zusammengesetzter Aussagen.

(a) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$
(b) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow s$
(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$
(d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow s))$
(e) $p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow s)$

Gib Wahrheitswerte für p, q, r, s an, sodass die Aussagen in (a) und (b) verschiedene Wahrheitswerte annehmen.

Aufgabe 2.2. Zeige mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

(a) $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
(b) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

In der Vorlesung wurden analoge Äquivalenzen mit vertauschten Rollen von $\wedge$ und $\vee$ gezeigt.

Aufgabe 2.3. Zeige mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

(a) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
(b) $\big((p \Rightarrow (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\big)$
(c) $\big((p \Rightarrow (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)\big)$
(d) $\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)\big)$
(e) $\big((p \vee q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\big)$

Aufgabe 2.4. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche keines von beiden?

(a) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
(b) $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow q$
(c) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$
(d) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q))$
(e) $p \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q))$

Aufgabe 2.5. Zeige mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle, dass

$$\big((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$$

eine Tautologie ist. Wie hängt dies mit einem Beweis durch Fallunterscheidung zusammen?

Aufgabe 2.6 (Half adder). Seien a und b zwei Aussagen. Bestimme den Wahrheitswertverlauf der Aussagen

$$s = a \veebar b \qquad \text{und} \qquad c = a \wedge b.$$

Verwende dabei 0 für falsch und 1 für wahr:

a	b	c	s
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Beobachte: Interpretieren wir a und b als einstellige Binärzahlen, dann ist die Binärdarstellung ihrer Summe $a + b$ durch die Ziffern c und s gegeben.

Aufgabe 2.7 (Full adder). Seien a, b und c_{in} drei Aussagen. Bestimme den Wahrheitswertverlauf der Aussagen

$$s = a \veebar b \veebar c_{\text{in}} \qquad \text{und} \qquad c_{\text{out}} = (a \wedge b) \vee (a \wedge c_{\text{in}}) \vee (b \wedge c_{\text{in}}).$$

Verwende dabei 0 für falsch und 1 für wahr:

a	b	c_{in}	c_{out}	s
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Beobachte: Interpretieren wir a, b und c_{in} als einstellige Binärzahlen, dann ist die Binärdarstellung ihrer Summe $a+b+c_{\text{in}}$ durch die Ziffern c_{out} und s gegeben. Mehrstellige Binärzahlen können damit wie folgt addiert werden: Bezeichnen a und b die i-ten Ziffern zweier Binärzahlen und c_{in} den Übertrag (carry) aus der Berechnung der vorangehenden Ziffer, dann liefert s die i-te Ziffer der Summe und c_{out} den Übertrag für die Berechnung der nächsten Ziffer.

Aufgabe 2.8. Das negierte Und (NAND) wird manchmal durch einen Pfeil notiert:

$$p \uparrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \wedge q)$$

p	q	$p \uparrow q$
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Zeige:

(a) $(\neg p) \Leftrightarrow (p \uparrow p)$
(b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q))$
(c) $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$

Versuche auch die Implikation $p \Rightarrow q$ und die Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ ausschließlich mit Hilfe des Junktors $\uparrow$ auszudrücken.

Aufgabe 2.9. Das negierte Oder (NOR) wird manchmal durch einen Pfeil notiert:

$$p \downarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q)$$

p	q	$p \downarrow q$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Zeige:
(a) $(\neg p) \Leftrightarrow (p \downarrow p)$
(b) $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$
(c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$
Versuche auch die Implikation $p \Rightarrow q$ und die Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ ausschließlich mit Hilfe des Junktors $\downarrow$ auszudrücken.

Aufgabe 2.10. In der linken Spalte weiter unten sind einige Tautologien aufgelistet, die in der Vorlesung besprochen wurden. Ersetzen wir die Aussagen p, q, r durch Zahlen a, b, c; die Junktoren $\vee, \wedge$ durch die Rechenoperationen $+, \cdot$; die Äquivalenz $\Leftrightarrow$ durch Gleichheit $=$; und die Negation $\neg p$ durch 2^a, so ergeben sich die Ausdrücke in der rechten Spalte.

$$\begin{array}{cc}
(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) & a + b = b + a \\
(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) & a \cdot b = b \cdot a \\
(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r) & a + (b + c) = (a + b) + c \\
(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \\
(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) & a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \\
(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\
\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) & 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b \\
\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) & 2^{a \cdot b} = 2^a + 2^b \\
\neg\neg p \Leftrightarrow p & 2^{2^a} = a
\end{array}$$

Welche dieser Formeln gelten für alle ganzen Zahlen a, b und c? Begründe die Antwort.

Aufgabe 2.11. Sei n eine ganze Zahl und p prim. Zeige, dass n genau dann durch p teilbar ist, wenn n^2 durch p teilbar ist. Beweise zwei Implikationen, um die Äquivalenz zu zeigen.

Aufgabe 2.12. Sei n eine ganze Zahl. Zeige, dass n genau dann durch 15 teilbar ist, wenn n^2 durch 15 teilbar ist. Beweise zwei Implikationen, um die Äquivalenz zu zeigen.

Aufgabe 2.13. Seien
$$n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k} \qquad \text{und} \qquad m = p_1^{\mu_1} \cdots p_k^{\mu_k}$$
die Primfaktorzerlegungen von n und m, wobei $p_1, \ldots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen bezeichnen und $\nu_i, \mu_i \geq 0$ natürliche Zahlen sind. Zeige, dass n genau dann m teilt, wenn $\nu_i \leq \mu_i$ für jedes $i = 1, \ldots, k$ gilt. Arbeite genau heraus, an welcher Stelle eingeht, dass die Primzahlen verschieden sind. Beweise zwei Implikationen, um die Äquivalenz zu zeigen.

Aufgabe 2.14. Seien a und b ganze Zahlen. Zeige mit Hilfe eines Zirkelschlusses, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(a) Die Zahlen a und b sind teilerfremd.
(b) Es existieren ganze Zahlen x und y mit $1 = ax + by$.
(c) Für jede Primzahl p gilt $p \nmid a$ oder $p \nmid b$.

Aufgabe 2.15. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch. Begründe die Antwort.

(a) $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall d \in \mathbb{Z} : d \mid n$
(b) $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists d \in \mathbb{Z} : d \nmid n$
(c) $\exists d \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : d \mid n$
(d) $\forall d \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : d \nmid n$
(e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : a \mid c \wedge b \mid c$
(f) $\exists a, b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : a \nmid c \vee b \nmid c$
(g) $\forall a, c \in \mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{Z} : a \mid b \wedge b \mid c$
(h) $\exists a, c \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a \nmid b \vee b \nmid c$

Aufgabe 2.16. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe die Antwort und bilde die Negation.
(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ac = bc \Rightarrow a = b$
(b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{N} : a + n = b \vee b + n = a$
(c) $\forall m, n \in \mathbb{N} : mn = 1 \Rightarrow (m = 1 \wedge n = 1)$
(d) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : a \mid c \wedge b \mid c$
(e) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow ab \mid c$

Aufgabe 2.17. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe die Antwort und bilde die Negation.
(a) $\exists! n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$
(b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$
(c) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall a, b \in \mathbb{Z} : (p \mid ab \wedge p \nmid a) \Rightarrow p \mid b$
(d) $\forall a \in \mathbb{Z} : (3 \nmid a \vee 7 \nmid a) \Rightarrow 42 \nmid a$
(e) $\forall x \in \mathbb{Q} : x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$

Aufgabe 2.18. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe die Antwort und bilde die Negation.
(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$
(b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 4 \mid ab \Rightarrow (4 \mid a \vee 4 \mid b)$
(c) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 5 \mid ab \Rightarrow (5 \mid a \vee 5 \mid b)$
(d) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : 6 \mid ab \Rightarrow (3 \mid a \vee 3 \mid b)$

Aufgabe 2.19. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe die Antwort und bilde die Negation.
(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)$
(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow (a + b) \mid c$
(c) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (6 \mid ab \wedge 6 \nmid a) \Rightarrow 6 \mid b$
(d) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (7 \mid ab \wedge 7 \nmid a) \Rightarrow 7 \mid b$
(e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (8 \mid ab \wedge 2 \nmid a) \Rightarrow 8 \mid b$

Aufgabe 2.20. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe die Antwort und bilde die Negation.
(a) $\forall a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a(a + 1)$
(b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (7 \nmid a \wedge 7 \nmid b) \Rightarrow 7 \nmid ab$
(c) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (6 \nmid a \wedge 6 \nmid b) \Rightarrow 6 \nmid ab$

Aufgabe 2.21. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründe die Antwort und bilde die Negation.

(a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \in \mathbb{N}_+ : n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$
(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 = y^2\big) \Rightarrow x = y$
(c) $\exists! p \in \mathbb{P} : p + 2 \in \mathbb{P} \wedge p + 4 \in \mathbb{P}$
(d) $\exists! p \in \mathbb{P} : 2 \mid p$
(e) $\exists p \in \mathbb{P} : 6 \mid p$
(f) $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

Dabei ist $\forall \varepsilon > 0$ eine Abkürzung für $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, wobei $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnet. Weiters bezeichnet $\mathbb{N}_+$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen und $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen.

Aufgabe 2.22. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe die Antwort und bilde die Negation. Verwende dabei Schulwissen zur Exponentialfunktionen.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow e^x < e^y$
(b) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow e^x \geq e^y$
(c) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : e^x \leq m$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{R} : e^x \leq m$
(e) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : m \leq e^x$
(f) $\exists! m \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : m \leq e^x$
(g) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : e^x = y$
(h) $\forall y > 0 : \exists! x \in \mathbb{R} : e^x = y$
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow e^x \neq e^y$
(j) $\exists x \in \mathbb{R} : e^x \leq 0$
(k) $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge e^x > 1$
(l) $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} = e^x e^y$
(m) $\exists x, y \in \mathbb{R} : e^{xy} = e^x + e^y$

Dabei ist $\forall y > 0$ eine Abkürzung für $\forall y \in \mathbb{R}_+$, wobei $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 2.23. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe die Antwort und bilde die Negation. Verwende dabei Schulwissen zu den trigonometrischen Funktionen.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
(b) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : -y \leq \sin(x) \wedge \sin(x) \leq y$
(c) $\exists \omega \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \omega) = \sin(x)$
(d) $\exists! \omega \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \omega) = \sin(x)$
(e) $\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : \cos(3x) = a \cos^3(x) + b \cos(x)$
(f) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = \sin(x)$
(g) $\exists x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = \sin(x)$
(h) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} : x = \pi n)$

Aufgabe 2.24. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Je zwei der folgenden Aussagen sind Verneinungen voneinander. Ordne jeder Aussage ihre Negation zu.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
(b) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$
(c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
(d) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

(e) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > y$
(f) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y$
(g) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq y$
(h) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = y$
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
(j) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \wedge f(x) = f(y)$
(k) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
(l) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge f(x) > f(y)$
(m) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$
(n) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$
(o) $\big(\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y\big) \vee \big(\exists x, y, z \in \mathbb{R} : x \neq z \wedge f(x) = y \wedge f(z) = y\big)$
(p) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x < y \wedge f(x) \geq f(y)$
(q) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge f(x) < f(y)$
(r) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x < y \wedge f(x) \leq f(y)$
(s) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = y$
(t) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) < y$

Aufgabe 2.25. Bestimme alle reellen Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $\sqrt{2x^2 + 1} = x$
(b) $\sqrt{x^4 + 3} = 2x^2$
(c) $\sqrt{x^6 + 8} = 3x^3$
(d) $(x^2 + 1)^{50} = (x^2 + 7)^{50}$
(e) $(x^2 + 1)^{51} = (3x - 1)^{51}$
(f) $(x^3 + 7)^{60} = (x^3 + 9)^{60}$
(g) $(x^2 + 1)^{62} = (3x + 1)^{62}$
(h) $x(x^2 - 1)(e^{x^2 - 4} + 2) = 3x(x^2 - 1)$

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250032)

zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsaufgaben zu Abschnitt 3

Mengen, Abbildungen, Ordnungs- und Äquivalenzrelationen,
Rechnen mit Restklassen

Aufgabe 3.1. Beschreibe jede der folgenden Mengen als Intervall oder als möglichst einfache Vereinigung von Intervallen und fertige Skizzen an.

(a) $[1, 4] \cap (3, 5)$
(b) $(1, 3] \cup (2, 4)$
(c) $[1, 4] \setminus (2, 3)$
(d) $[1, 4] \setminus (2, 5)$
(e) $[1, 4] \setminus [1, 4)$
(f) $[1, 4] \setminus [0, 5]$
(g) $[1, 3] \,\Delta\, [2, 4]$
(h) $[1, 2)^c$, wobei das Komplement in $\mathbb{R}$ gemeint ist.
(i) $([1, 2] \cup (3, 4))^c$, wobei das Komplement in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

Aufgabe 3.2. Für reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$ betrachten wir die Intervalle

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad \text{und} \qquad J = [c, d] = \{x \in \mathbb{R} : c \leq x \leq d\}.$$

Charakterisiere folgende Aussagen durch äquivalente Bedingungen an a, b, c und d.

(a) $I \subseteq J$
(b) $I \cap J = \emptyset$
(c) $I \cup J \subseteq [1, 4]$
(d) $[2, 3] \subseteq I \cap J$

Aufgabe 3.3. Zeige zwei Inklusionen, um folgende Identität zu beweisen:

$$\big\{n \in \mathbb{Z} \bigm| \exists k \in \mathbb{Z} : n = (2k+1)^2\big\} = \big\{n \in \mathbb{Z} \bigm| \exists l \in \mathbb{Z} : n = (2l+7)^2\big\}$$

Aufgabe 3.4. Seien $A_1 \subseteq A_2$ und $B_1 \subseteq B_2$ Mengen. Zeige:

(a) $A_1 \cap B_1 \subseteq A_2 \cap B_2$
(b) $A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2$

Formuliere analoge Eigenschaften für Vereinigung und Durchschnitt von Mengenfamilien.

Aufgabe 3.5. Seien A und B zwei Mengen. Zeige:

(a) $A \subseteq A \cup B$
(b) $A \cap B \subseteq A$
(c) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Aufgabe 3.6. Seien A und B Mengen. Zeige:

(a) $A = B \Leftrightarrow A \,\Delta\, B = \emptyset$
(b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \,\Delta\, B \subseteq B$
(c) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \,\Delta\, B = A \cup B$

Aufgabe 3.7. Seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die drei Mengen

$$A \setminus B, \qquad A \cap B, \qquad B \setminus A$$

paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung mit $A \cup B$ übereinstimmt.

Aufgabe 3.8. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Zeige:

$$x \in A_1 \,\Delta\, A_2 \quad \Leftrightarrow \quad |\{i \in \{1,2\} : x \in A_i\}| \text{ ist ungerade}$$
$$x \in A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta\, A_3 \quad \Leftrightarrow \quad |\{i \in \{1,2,3\} : x \in A_i\}| \text{ ist ungerade}$$

Zeige anschließend mittels vollständiger Induktion nach n:

$$x \in A_1 \,\Delta \cdots \Delta\, A_n \quad \Leftrightarrow \quad |\{i \in \{1,\ldots,n\} : x \in A_i\}| \text{ ist ungerade}$$

Beachte, dass Klammersetzung und Reihenfolge bei einer mehrfachen symmetrischen Differenz $A_1 \,\Delta \cdots \Delta\, A_n$ keine Rolle spielen.

Aufgabe 3.9. Seien A, B und C drei Mengen. Gib für jede der folgenden Identitäten zwei Beweise: einen durch Rückführung auf logische Tautologien und einen zweiten mit Hilfe einer Mengentafel.

(a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap C) \setminus (A \cap C)$

Versuche auch, diese Identitäten mit Hilfe von Venn-Diagrammen zu beweisen.

Aufgabe 3.10. Seien A, B und C drei Mengen. Zeige:

(a) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$
(b) $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$
(c) $A \,\Delta\, \emptyset = A$
(d) $A \,\Delta\, A = \emptyset$
(e) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

Gib Beweise mittels Mengentafeln, Venn-Diagrammen und durch Rückführung auf logische Tautologien.

Aufgabe 3.11. Welche der folgenden Identitäten gelten für alle Mengen A, B und C? Begründe die Antwort, d.h., gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) $A \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B) \,\Delta\, C$
(b) $A \,\Delta\, (B \cup C) = (A \,\Delta\, B) \cup (A \,\Delta\, C)$
(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \cup B) \setminus (B \cup C)$
(d) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, C$
(e) $A \,\Delta\, (B \cap C) = (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$
(f) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$
(g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
(h) $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \cup C)$
(i) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$
(j) $(A \,\Delta\, B) \setminus C = (A \setminus C) \,\Delta\, (B \setminus C)$
(k) $A \,\Delta\, (B \setminus C) = (A \,\Delta\, B) \setminus (A \,\Delta\, C)$
(l) $A \setminus (B \,\Delta\, C) = (A \setminus B) \,\Delta\, C$
(m) $A \setminus (B \,\Delta\, C) = (A \setminus B) \,\Delta\, (A \setminus C)$

Aufgabe 3.12. Gib Beispiele von Mengen A, B und C an, die zeigen, dass folgende Identitäten i.A. falsch sind.

(a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup C$
(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$
(e) $(A \,\Delta\, B) \setminus C = A \,\Delta\, (B \setminus C)$
(f) $(A \setminus B) \,\Delta\, C = A \setminus (B \,\Delta\, C)$

Bei jedem Punkt kann jedoch das Gleichheitszeichen durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ so ersetzt werden, dass die resultierende Inklusion für beliebige Mengen A, B, C wahr ist. Gib an, welche Inklusion jeweils gilt und beweise sie.

Aufgabe 3.13. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie und B eine Menge. Zeige:

(a) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B)$
(b) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B)$

Aufgabe 3.14. Seien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_j)_{j\in J}$ zwei Mengenfamilien. Zeige:

(a) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$
(b) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

Aufgabe 3.15. Beschreibe folgende Mengen als Intervalle oder als Vereinigung von Intervallen:

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}[\frac{1}{n}, n]$
(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}[1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{n}]$
(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}[1-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}]$
(d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}[1-\frac{1}{n}, 1]$

Aufgabe 3.16. Seien A und B Teilmengen von U. Für das Komplement in U wurde in der Vorlesung die erste der folgenden Identitäten auf vier verschiedene Arten gezeigt. Gib analoge Beweise der verbleibenden Identitäten.

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(c) $(A^c)^c = A$
(d) $A \cup A^c = U$
(e) $A \cap A^c = \emptyset$
(f) $\emptyset^c = U$
(g) $U^c = \emptyset$

Aufgabe 3.17. Seien $(A_i)_{i\in I}$ Teilmengen von U. Für das Komplement in U zeige:

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Aufgabe 3.18. Für Mengen A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 und C zeige:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(c) Gilt $A_1 \subseteq A_2$ und $B_1 \subseteq B_2$, dann auch $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$

Aufgabe 3.19. Gib alle Elemente der Potenzmengen $P(\{1,2,3,4\})$ und $P(P(P(P(\emptyset))))$ explizit an. Hinweis: In der Vorlesung wurde $P(P(P(\emptyset)))$ angegeben.

Aufgabe 3.20. Je zwei der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ stimmen überein. Ordne sie entsprechend zu und fertige Skizzen an, die die Gleichheit plausibel machen.

(a) $([1,3]\times[5,6])\cup([2,4]\times[5,6])$
(b) $([1,3]\times[5,6])\cap([2,4]\times[5,6])$
(c) $([1,3]\times[5,7])\cap([2,4]\times[6,8])$
(d) $([1,3]\times[5,7])\setminus[2,4]\times[6,8])$
(e) $([1,4]\times[5,8])\setminus([2,3]\times[6,7])$
(f) $([1,2)\times[5,7])\cup([1,4]\times[5,6))$
(g) $\big(([1,2)\cup(3,4])\times[5,8]\big)\cup\big([1,4]\times([5,6)\cup(7,8])\big)$
(h) $[2,3]\times[5,6]$
(i) $[2,3]\times[6,7]$
(j) $[1,4]\times[5,6]$

Aufgabe 3.21. Welche der folgenden Identitäten gelten für beliebige Mengen A_1, A_2, B_1, B_2 und B? Begründe die Antwort, d.h., gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$
(b) $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)=(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$
(c) $(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2)=(A_1\setminus A_2)\times(B_1\setminus B_2)$
(d) $(A_1\times B)\setminus(A_2\times B)=(A_1\setminus A_2)\times B$

Fertige auch Skizzen an, die die Antworten plausibel machen.

Aufgabe 3.22. Beschreibe folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ geometrisch (in Worten):

(a) $[0,1]\times[0,2]$
(b) $\big([0,1]\times\{0,2\}\big)\cup\big(\{0,1\}\times[0,2]\big)$
(c) $\{0,1\}\times\{0,2\}$
(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, y=2x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, y=2-2x\}$

Aufgabe 3.23. Beschreibe folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ geometrisch (in Worten):

(a) $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$
(b) $\big([0,1]\times[0,2]\times\{0,3\}\big)\cup\big([0,1]\times\{0,2\}\times[0,3]\big)\cup\big(\{0,1\}\times[0,2]\times[0,3]\big)$
(c) $\big([0,1]\times\{0,2\}\times\{0,3\}\big)\cup\big(\{0,1\}\times[0,2]\times\{0,3\}\big)\cup\big(\{0,1\}\times\{0,2\}\times[0,3]\big)$
(d) $\{0,1\}\times\{0,2\}\times\{0,3\}$

Aufgabe 3.24. Seien A, B und C drei endliche Mengen. Zeige:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Hinweis: Verwende mehrmals die Identitiät $|X\cup Y|=|X|+|Y|-|X\cap Y|$, die für beliebige endliche Mengen X und Y gilt.

Aufgabe 3.25. Sei $f\colon X\to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen mit $|X|=|Y|$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- f ist injektiv.
- f ist surjektiv.
- f ist bijektiv.

Aufgabe 3.26. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 + 1$.

(a) Berechne $f(2)$.
(b) Berechne $f(A)$, wobei $A = (2,5)$.
(c) Berechne $f([1,2])$.
(d) Berechne $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(0)$.
(e) Berechne $f^{-1}(B)$, wobei $B = (-1,5]$.
(f) Berechne $f^{-1}([2,10])$
(g) Berechne $f^{-1}([0,1))$
(h) Gib eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(C)) \neq C$ gilt.
(i) Gib eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f^{-1}(f(D)) \neq D$ gilt.

Aufgabe 3.27. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4-3x}{2-x}$.

(a) Berechne $f(3)$.
(b) Berechne $f(A)$, wobei $A = (3,4)$.
(c) Berechne $f([0,1])$.
(d) Berechne $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(-1)$.
(e) Berechne $f^{-1}(B)$, wobei $B = (1,2]$.
(f) Berechne $f^{-1}([1,4])$
(g) Gib eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $f(f^{-1}(C)) \neq C$ gilt.
(h) Erkläre, warum keine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ existiert, für die $f^{-1}(f(D)) \neq D$ gilt.

Aufgabe 3.28. Sei $f\colon X \to Y$ surjektiv und $B \subseteq Y$. Zeige $f(f^{-1}(B)) = B$.

Aufgabe 3.29. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$. Zeige $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ und $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Aufgabe 3.30. Seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, A_1, A_2 zwei Teilmengen von X und B_1, B_2 zwei Teilmengen von Y. Zeige:

(a) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2)) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
(b) $f^{-1}(B_1 \,\Delta\, B_2) = f^{-1}(B_1) \,\Delta\, f^{-1}(B_2)$.
(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(d) $f(A_1 \,\Delta\, A_2) \supseteq f(A_1) \,\Delta\, f(A_2)$.

Gib Beispiele an, die zeigen, dass in (c) und (d) strikte Inklusion eintreten kann. Zeige, dass für injektives f in (c) und (d) Gleichheit gilt.

Aufgabe 3.31. Betrachte die Abbildung $f\colon \{1,\dots,8\} \to \{1,\dots,5\}$ gegeben durch:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	3	4	1	2	5	2	2	3

(a) Bestimme $f(A)$, wobei $A = \{2,4,6,8\}$.
(b) Bestimme $f^{-1}(B)$, wobei $B = \{1,2,3\}$.
(c) Erkläre, warum keine Teilmenge $C \subseteq \{1,\dots,5\}$ existiert, für die $f(f^{-1}(C)) \neq C$ gilt.
(d) Gib eine Teilmenge $D \subseteq \{1,\dots,8\}$ an, für die $f^{-1}(f(D)) \neq D$ gilt.

Aufgabe 3.32. Seien X und Y zwei Mengen und $b \in Y$. Betrachte die konstante Abbildung $f\colon X \to Y$, $f(x) = b$, die jedes Element in X auf dasselbe Element b abbildet.

(a) Für welche X ist f injektiv?
(b) Für welche Y ist f surjektiv?

Aufgabe 3.33. Betrachte folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, &\quad f(n) = n+1 \\ g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, &\quad g(n) = n+n \\ h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, &\quad h(n) = n \cdot n \end{aligned}$$

Ornde die sechs Kompositionen

$$f \circ g \circ h, \quad g \circ h \circ f, \quad h \circ f \circ g, \quad f \circ h \circ g, \quad h \circ g \circ f, \quad g \circ f \circ h$$

den entsprechenden Zuordnungsvorschriften zu:

(a) $n \mapsto 2n^2 + 1$
(b) $n \mapsto 2n^2 + 2$
(c) $n \mapsto 4n^2 + 1$
(d) $n \mapsto 2n^2 + 4n + 2$
(e) $n \mapsto 4n^2 + 4n + 1$
(f) $n \mapsto 4n^2 + 8n + 4$

Aufgabe 3.34. Betrachte folgende Abbildungen:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{5}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3}{2}\}, \qquad f(x) = \frac{3x+7}{2x+5}$$

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{5}{2}\}, \qquad g(x) = \frac{-5x+8}{2x-3}$$

Ordne den Abbildungen

$$f^{-1}, \quad g^{-1}, \quad g \circ f, \quad g \circ f$$

die entsprechenden Abbildungsvorschriften zu:

(a) $x \mapsto -x + 3$
(b) $x \mapsto -x - 5$
(c) $x \mapsto \frac{5x-7}{-2x+3}$
(d) $x \mapsto \frac{3x+8}{2x+5}$

Aufgabe 3.35. Zeige, dass folgende Abbildungen wohldefinierte Bijektionen sind und gib ihre Umkehrabbildungen an.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/3 - 2$
(b) $g_1\colon (2, \infty) \to (0, \frac{1}{2})$, $g_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$
(c) $g_2\colon (-\infty, 0) \to (0, \frac{1}{2})$, $g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$
(d) $h_1\colon (-\infty, -5] \to (-\infty, 0]$, $h_1(x) = 4 - (x+3)^2$
(e) $h_2\colon [-1, \infty) \to (-\infty, 0]$, $h_2(x) = 4 - (x+3)^2$

Aufgabe 3.36.

(a) Gib reelle Zahlen $a < b$ an, sodass $[a, b] \to [0, 2]$, $x \mapsto -2(x+1)$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.
(b) Gib reelle Zahlen c und d an, sodass $(-\infty, c] \to [d, \infty)$ $x \mapsto (x-5)^2 - 4$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.
(c) Gib reelle Zahlen e und f an, sodass $[-2, -1] \to [e, f]$, $x \mapsto \frac{1}{2+3x^2}$ eine Bijektion ist und berechne ihre Umkehrabbildung.

Aufgabe 3.37. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Berechne im bijektiven Fall die Umkehrabbildung.

(a) $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n - 1$
(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n \cdot n$
(c) $\mathbb{R} \to [1, \infty)$, $x \mapsto |x - 1| + 1$
(d) $[1, 4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4x + 5$
(e) $[0, \infty) \to (0, \frac{1}{5}]$, $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+5}$
(f) $\mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x+3}{x/5-1}$
(g) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$
(h) $(-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

Aufgabe 3.38. Gib eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und $\{n \in \mathbb{Z} : 3 \mid (n - 1)\}$ an.

Aufgabe 3.39. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Verwende dabei Schulwissen zu den trigonometrischen Funktionen.

(a) $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$
(b) $[0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$
(c) $(\pi, 2\pi) \to (-1, 1)$, $x \mapsto \cos x$
(d) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$
(e) $(\pi, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cot x$
(f) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$
(g) $\mathbb{R} \to (0, 1]$, $x \mapsto e^{-x^2/2}$
(h) $(1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(x - 1)$
(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
(j) $\mathbb{R} \to [1, \infty)$, $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Aufgabe 3.40.

(a) Sei $f \colon X \to Y$ injektiv und $A_1, A_2 \subseteq X$ mit $f(A_1) = f(A_2)$. Zeige $A_1 = A_2$.
(b) Sei $f \colon X \to Y$ surjektiv und $B_1, B_2 \subseteq Y$ mit $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. Zeige $B_1 = B_2$.

Aufgabe 3.41.

(a) Betrachte die Funktion $g \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$. Gib zwei verschiedene (rechtsinverse) Abbildungen $f_1, f_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ an, für die $g \circ f_1 = \mathrm{id}$ und $g \circ f_2 = \mathrm{id}$ gilt. Erkläre, warum keine (linksinverse) Abbildung $h \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $h \circ g = \mathrm{id}$ exstieren kann.
(b) Betrachte die Funktion $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Gib zwei verschiedene (linksinverse) Abbildungen $g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ an, für die $g_1 \circ f = \mathrm{id}$ und $g_2 \circ f = \mathrm{id}$ gilt. Erkläre, warum keine (rechtsinverse) Abbildung $h \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f \circ h = \mathrm{id}$ exstieren kann.

Aufgabe 3.42. Betrachte die Abbildungen $\rho, \sigma, \tau \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= (-y, x) && \text{(Rotation um } 90^\circ \text{ um den Koordinatenursprung)} \\ \sigma(x, y) &= (y, x) && \text{(Spiegelung an der Diagonalen)} \\ \tau(x, y) &= (x, -y) && \text{(Spiegelung an der } x\text{-Achse)} \end{aligned}$$

(a) Berechne $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$ und interpretiere die Abbildung geometrisch.
(b) Berechne $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$ und interpretiere die Abbildung geometrisch.
(c) Berechne $\tau \circ \sigma$ und interpretiere die Abbildung geometrisch.

Aufgabe 3.43. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen und $h = g \circ f\colon X \to Z$ ihre Komposition. Zeige: Sind zwei der drei Abbildungen f, g und h bijektiv, dann ist auch die dritte bijektiv. Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt:

(a) Sind f und g bijektiv, dann ist auch h bijektiv.

Zeige nun:

(b) Sind g und h bijektiv, dann ist auch f bijektiv.
(c) Sind h und f bijektiv, dann ist auch g bijektiv.

Aufgabe 3.44. Welche der folgenden Relationen sind reflexiv, transitiv, symmetrisch oder antisymmetrisch?

(a) $\sim$ auf $\mathbb{R}$: $x \sim y :\Leftrightarrow x = y \vee x = -y$
(b) $\simeq$ auf $\mathbb{R}$: $x \simeq y :\Leftrightarrow x = y \vee (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z})$
(c) $\cong$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$: $f \cong g :\Leftrightarrow \exists C \geq 0 : \forall a \in \mathbb{N}_+ : |g(a) - f(a)| \leq C/a$
(d) $\equiv$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$: $f \equiv g :\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{Z}_g : f(a) = g(a)$
(e) $\preceq$ auf $\mathbb{R}$: $x \preceq y :\Leftrightarrow x^3 \leq y^3$
(f) $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{R}$: $x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow (x-1)^4 \leq (y-1)^4$
(g) $\trianglelefteq$ auf $\mathbb{N}$: $a \trianglelefteq b :\Leftrightarrow (n+1) \mid (m+1)$

Aufgabe 3.45. Bestimme obere und untere Schranken folgender Teilmengen, falls diese bezüglich der angegebenen Ordnungen existieren.

(a) $(2, 3]$ in $(\mathbb{R}, \leq)$
(b) $\{-n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ in $(\mathbb{R}, \leq)$
(c) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ in $(\mathbb{N}_+, \mid)$
(d) $\{[1, 4], [2, 5], [3, 6]\}$ in $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$

Versuche jeweils möglichst kleine obere Schranken und möglichst große untere Schranken anzugeben.

Aufgabe 3.46. Welche der folgenden Abbildungen sind bezüglich der natürlichen Ordnung auf $\mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend? Verwende dabei Schulwissen zu den trigonometrischen Funktionen.

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$
(b) $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$
(c) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$
(d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cot(\pi x)$
(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$
(f) $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$
(g) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2/2}$
(h) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Aufgabe 3.47 (Lexikographische Ordnung). Seien $(X, \preceq)$ und $(Y, \sqsubseteq)$ zwei geordnete Mengen.

(a) Zeige, dass

$$(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \prec x_2 \vee \big(x_1 = x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2\big)$$

eine Ordnung auf $X \times Y$ definiert.

(b) Zeige, dass $\trianglelefteq$ eine Totalordnung ist, wenn $\preceq$ und $\sqsubseteq$ Totalordnungen sind.
(c) Ist die Abbildug $(X \times Y, \trianglelefteq) \to (X, \preceq)$, $(x, y) \mapsto x$ monoton?
(d) Ist die Abbildug $(X \times Y, \trianglelefteq) \to (Y, \sqsubseteq)$, $(x, y) \mapsto y$ monoton?

Aufgabe 3.48. Zeige, dass streng monotone Abbildungen zwischen totalgeordneten Mengen injektiv sind.

Aufgabe 3.49. Zeige, dass die Komposition monoton wachsender Abbildungen monoton wachsend ist. Gilt eine analoge Aussage für monoton fallende Abbildungen?

Aufgabe 3.50. Sei $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge und $x, y, z \in X$. Zeige:
(a) Gilt $x \prec y$ und $y \preceq z$, dann auch $x \prec z$.
(b) Gilt $x \preceq y$ und $y \prec z$, dann auch $x \prec z$.
(c) Gilt $x \prec y$ und $y \prec z$, dann auch $x \prec z$.

Aufgabe 3.51. Sei $(X, \preceq)$ eine totalgeordnete nichtleere endliche Menge. Zeige mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Elemente von X, dass X ein (eindeutiges) Maximum besitzt. Zeige analog, dass X auch ein (eindeutiges) Minimum besitzt.

Aufgabe 3.52. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Weiters sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die in folgendem Sinn mit den Äquivalenzrelationen verträglich ist:

$$\forall x, x' \in X : x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$$

Zeige, dass durch

$$X/{\sim} \to Y/{\approx}, \qquad [x]_\sim \mapsto [f(x)]_\approx$$

eine Abbildung wohldefiniert ist.

Zeige damit, dass folgende Abbildungen wohldefiniert sind:
(a) $\mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{12}$, $[a]_{24} \to [a]_{12}$
(b) $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9$, $[a]_3 \mapsto [3a]_9$
(c) $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9$, $[a]_3 \mapsto [a^3]_9$

Aufgabe 3.53. Gib die Additions- und Multiplikationstafeln für die Restklassenringe $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_6$ an. Welche dieser Restklassen sind invertierbar?

Aufgabe 3.54. Welche der folgenden Restklassen sind invertierbar. Bestimme gegebenenfalls die Inverse.
(a) $[15] \in \mathbb{Z}_{128}$
(b) $[34] \in \mathbb{Z}_{323}$
(c) $[19] \in \mathbb{Z}_{109}$
(d) $[53] \in \mathbb{Z}_{100}$

Aufgabe 3.55.
(a) Löse die Gleichung $[7] \cdot x + [11] = [33]$ in $\mathbb{Z}_{37}$.
(b) Löse die Gleichung $[7] \cdot x + [11] = [33]$ in $\mathbb{Z}_{256}$.
(c) Löse die Gleichung $[5] \cdot x + [13] = [21]$ in $\mathbb{Z}_{34}$.
(d) Löse die Gleichung $[15] \cdot x + [11] = [8] \cdot x + [33]$ in $\mathbb{Z}_{60}$.
(e) Löse die Gleichung $[28] \cdot x + [61] = [15] \cdot x + [64]$ in $\mathbb{Z}_{87}$.

Gib die Lösungen $x \in \mathbb{Z}_n$ jeweils in der Form $x = [a]_n$ mit $0 \leq a < n$ an.

Aufgabe 3.56.

(a) Löse die Kongruenz $19a \equiv 17 \mod 64$.
(b) Löse die Kongruenz $19a \equiv 17 \mod 128$.
(c) Löse die Kongruenz $19a \equiv 17 \mod 256$.

Gib jeweils alle Lösungen $a \in \mathbb{Z}$ an.

Einführung in die Mathematik

Wintersemester 2022/23 (250032)
zusammengestellt von Stefan Haller

Übungsaufgaben zu Abschnitt 4

Gruppen, Ringe, Körper, Komplexe Zahlen

Aufgabe 4.1. Zeige, dass in $M_2(\mathbb{R})$ auch das Rechtsdistributivgesetz gilt.

Aufgabe 4.2. Zeige, dass die Menge aller Diagonalmatrizen $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\}$ einen kommutativen Unterring mit Eins in $M_2(\mathbb{R})$ bildet.

Aufgabe 4.3. Sei X eine nichtleere Menge. Zeige, dass $F(X, \mathbb{R}) := \mathbb{R}^X$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation von Funktionen einen kommutativen Ring mit Eins bidet.

Aufgabe 4.4. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $\{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ einen Unterring von $\mathbb{Z}$ bildet.

Aufgabe 4.5. Sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Zeige, dass $P(Y)$ einen Teilring von $(P(X), \Delta, \cap)$ bildet.

Aufgabe 4.6. Gib Nullteiler in $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{60}$ und $\mathbb{Z}_{5767}$ an.

Aufgabe 4.7. Stelle Additions- und Multiplikationtafel für $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_6$ auf. Wie lassen sich darin Nullteiler und multiplikativ inverse Elemente finden?

Aufgabe 4.8. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Zeige, dass die folgenden beiden multiplikativen Kürzungsregeln gelten:
(a) $\forall a \in R^* : \forall b, c \in R : ab = ac \Rightarrow b = c.$
(b) $\forall a \in R^* : \forall b, c \in R : ba = ca \Rightarrow b = c.$

Aufgabe 4.9. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins, $a \in R^*$ und $b, c \in R$.
(a) Zeige, dass die Gleichung $ax + b = c$ eine eindeutige Lösung $x \in R$ besitzt.
(b) Zeige, dass die Gleichung $xa + b = c$ eine eindeutige Lösung $x \in R$ besitzt.

Aufgabe 4.10.
(a) Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_6$ der Gleichung $[2]_6 \cdot x = [2]_6$.
(b) Betsimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_6$ der Gleichung $[2]_6 \cdot x = [3]_6$.

Aufgabe 4.11. Bestimme alle Einheiten in $\mathbb{Z}_{24}$ und $\mathbb{Z}_{60}$.

Aufgabe 4.12. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $a, b, c \in R$ mit $ab = c$. Zeige: Sind (irgenwelche) zwei der drei Elemente a, b, c Einheiten, dann ist auch das dritte eine Einheit.

Aufgabe 4.13. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeige, dass A invertierbar (eine Einheit von $M_2(\mathbb{R})$) ist mit Inverser

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/(ad-bc) & -b/(ad-bc) \\ -c/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.14. Unter der Determinante einer 2×2-Matrix verstehen wir die Zahl

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

Zeige, dass für je zwei Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Schließe daraus:
(a) $A \in M_2(\mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.
(b) $A \in M_2(\mathbb{Q})$ ist genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.
(c) $A \in M_2(\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) = \pm 1$.

Aufgabe 4.15. Sei $h\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen. Bezeichne $F(X, \mathbb{R})$ den Ring aller Funktionen $X \to \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation von Funktionen. Zeige, dass die Abbildung

$$F(Y, \mathbb{R}) \to F(X, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f \circ h$$

ein Ringhomomorphismus ist, d.h., zeige, dass für $f, g \in F(Y, \mathbb{R})$ gilt:
(a) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$
(b) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$
(c) $1_Y \circ h = 1_X$
Dabei bezeichnet $1_X \in F(X, \mathbb{R})$ die konstante Einsfunktion, das Einselement in $F(X, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4.16. Sei $h\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen. Betrachte die Potenzmenge $P(X)$ mit der symmetrischen Mengendifferenz und dem Durchschnitt als Ring, $(P(X), \Delta, \cap))$. Zeige, dass die Abbildung

$$P(Y) \to P(X), \quad A \mapsto h^{-1}(A)$$

ein Ringhomomorphismus ist, d.h., zeige, dass für $A, B \in P(Y)$ gilt:
(a) $h^{-1}(A \,\Delta\, B) = h^{-1}(A) \,\Delta\, h^{-1}(B)$
(b) $h^{-1}(A \cap B) = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$
(c) $h^{-1}(Y) = X$

Aufgabe 4.17. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(a + b\mathbf{i}) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.18. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Für $a, b \in K$ mit $b \neq 0$ schreiben wir

$$\frac{a}{b} := a/b := ab^{-1}.$$

Zeige, dass für $a, b, c, d \in K$ folgende Rechenregeln gelten:
(a) $\frac{a}{1} = a$
(b) Gilt $a \neq 0$, dann auch $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
(c) Gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, dann $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$.
(d) Gilt $b \neq 0$ und $d \neq 0$, dann auch $bd \neq 0$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
(e) Gilt $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$, dann auch $\frac{c}{d} \neq 0$, $bc \neq 0$ und $\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$.
(f) Gilt $b \neq 0$, dann auch $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$.
(g) Gilt $b \neq 0$, $c \neq 0$, dann auch $bc \neq 0$ und $\frac{a}{b}/c = \frac{a}{bc}$.
(h) Gilt $c \neq 0$ und $d \neq 0$, dann auch $\frac{c}{d} \neq 0$ und $a/\frac{c}{d} = \frac{ad}{c}$.

(i) Gilt $b \neq 0$, dann $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.
(j) Gilt $b \neq 0$ und $d \neq 0$, dann auch $bd \neq 0$ und $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
(k) Gilt $b \neq 0$ und $d \neq 0$, dann auch $bd \neq 0$ und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.
Hinweis um den Arbeitsaufwand zu minimieren: (e) folgt aus (d) und (c). (f) folgt aus (d) und (a). (g) und (h) folgen aus (e) und (a). (k) folgt aus (i) und (j).

Aufgabe 4.19. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so, dass
$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}.$$
Zeige, dass dann schon $a = c$ und $b = d$ gelten muss.

Aufgabe 4.20. Zeige, dass
$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$
einen Unterkörper von $\mathbb{R}$ bildet. Zeige, dass
$$\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}], \quad \varphi(a + b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}$$
ein Körperautomorphismus ist, für den $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$ gilt.

Aufgabe 4.21. Sei p ein Primzahl. Zeige, dass $\mathrm{id}\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ der einzige Körperautomoprhismus von $\mathbb{Z}_p$ ist. Hinweis: Jede Restklasse lässt sich in der Form $[1] + \cdots + [1]$ schreiben.

Aufgabe 4.22. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die komplexe Konjugation folgende Eigenschaften besitzt:
(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
(b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
(c) $\bar{\bar{z}} = z$
(d) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
(e) Ist $z \neq 0$, dann $\bar{z}z \in \mathbb{R}$ und $\bar{z}z > 0$, also $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$
Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\bar{z} = -z$?

Aufgabe 4.23. Zeige, dass
$$\mathbb{Q}[\mathbf{i}] = \left\{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$
einen Unterkörper von $\mathbb{C}$ bildet. Zeige, dass
$$\varphi\colon \mathbb{Q}[\mathbf{i}] \to \mathbb{Q}[\mathbf{i}], \quad \varphi(a + b\mathbf{i}) = \overline{a + b\mathbf{i}} = a - b\mathbf{i}$$
ein Körperautomorphismus ist.

Aufgabe 4.24 (Gaußsche Zahlen). Zeige, dass
$$\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$
einen Unterring von $\mathbb{C}$ bildet. Erkläre, warum $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins ist.

Aufgabe 4.25. Für $z = 1 + 2\mathbf{i}$ und $w = 2 - 3\mathbf{i}$ berechne
$$z + w, \quad z - w, \quad wz, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{w}{z}, \quad \bar{w}$$
und gib die Ergebnisse in der Form $a + b\mathbf{i}$ mit reellen a und b an. Zeichne diese Zahlen in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 4.26. Löse folgende lineare Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(a) $(2+2\mathbf{i})z+(3+3\mathbf{i})=11+27\mathbf{i}$
(b) $(3+\mathbf{i})z+(5-\mathbf{i})=15+19\mathbf{i}$
(c) $\mathbf{i}z+6=5z-4\mathbf{i}$

Aufgabe 4.27. Berechne die Quadratwurzeln folgender komplexer Zahlen:

$$-3+4\mathbf{i},\quad -8-6\mathbf{i},\quad 2\mathbf{i},\quad -15-8\mathbf{i},\quad -36,\quad -\mathbf{i}$$

Aufgabe 4.28. Löse folgende quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(a) $z^2+(2+2\mathbf{i})z-3-2\mathbf{i}=0$
(b) $z^2+(4+10\mathbf{i})z-28+44\mathbf{i}=0$
(c) $z^2-(2+2\mathbf{i})z+24+12\mathbf{i}=0$

Aufgabe 4.29. Sei $(K,+,\cdot,\leq)$ ein geordneter Körper und $a,b,c\in K$. Zeige folgende Rechenregeln für *strikte* Ungleichungen durch Rückführung auf die entsprechenden Aussagen mit $\leq$ aus der Vorlesung:

(a) $a<b\Rightarrow a+c<b+c$
(b) $a<b\Leftrightarrow 0<b-a\Leftrightarrow -a>-b$
(c) $a<0\Leftrightarrow -a>0$
(d) $a>0\wedge b>0\Rightarrow ab>0$
(e) $a<b\wedge c>0\Rightarrow ac<bc$
(f) $a<b\wedge c<0\Rightarrow ac>bc$
(g) $a\neq 0\Rightarrow a^2>0$

Aufgabe 4.30. Zeige, dass

$$S^1:=\left\{a+b\mathbf{i}:a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2=1\right\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ bildet.

Aufgabe 4.31. Zeige, dass folgende Matrizenmengen Untergruppen von $GL_2(\mathbb{R})$ bilden:

(a) $\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right):a,b,c,d,\in\mathbb{R},ad-bc=1\}=SL_2(\mathbb{R})$
(b) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&-b\\b&a\end{smallmatrix}\right):a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2=1\right\}=SO_2(\mathbb{R})$
(c) $\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right):a,b,d\in\mathbb{R},a\neq 0,d\neq 0\}$
(d) $\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right):a,b\in\mathbb{R},a\neq 0\}$
(e) $\{\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right):b\in\mathbb{R}\}$

Aufgabe 4.32. Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $g,h,k\in G$. Zeige, dass die Gleichung

$$gxh=k$$

eine eindeutige Lösung $x\in G$ besitzt.

Aufgabe 4.33. Gib zwei Permutationen $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_4$ an, für die $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$ gilt.

Aufgabe 4.34. Betrachte die Permutationen $\sigma,\tau,\rho\in\mathfrak{S}_6$ wobei

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	2	3	4	5	6	1
$\tau(n)$	1	5	3	4	2	6
$\rho(n)$	1	3	4	2	5	6

(a) Bestimme eine Permutation $\pi_1\in\mathfrak{S}_6$, für die $\tau\circ\pi_1\circ\sigma=\rho$ gilt.

(b) Bestimme eine Permutation $\pi_2 \in \mathfrak{S}_6$, für die $\sigma \circ \pi_2 = \rho$ gilt.
(c) Bestimme eine Permutation $\pi_3 \in \mathfrak{S}_6$, für die $\pi_3 \circ \tau = \rho$ gilt.
(d) Bestimme eine Permutation $\pi_4 \in \mathfrak{S}_6$, für die $\mathrm{id} = \rho \circ \pi_4$ gilt.

Aufgabe 4.35. Betrachte die Verknüpfung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\oplus} \mathbb{Z}, \quad a \oplus b := a + b - 1.$$

Bildet $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine Gruppe?

Aufgabe 4.36. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

(a) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $a \mapsto 5a$
(b) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $a \mapsto 5 + a$
(c) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $x \mapsto e^{7x}$
(d) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}_+, \cdot)$, $n \mapsto 2^n$
(e) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $z \mapsto z^3$
(f) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q}_+, \cdot)$, $x \mapsto x^2$
(g) $(\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $x \mapsto x + 1$
(h) $(\mathbb{R}, +) \to SO_2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{smallmatrix}\right)$
(i) $(\mathbb{R}, +) \to GL_2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
(j) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to GL_2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe 4.37.

(a) Seien $\varphi\colon (G, \cdot) \to (H, \odot)$ und $\psi\colon (H, \odot) \to (K, \otimes)$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeige, dass $\psi \circ \varphi\colon (G, \cdot) \to (K, \otimes)$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus ist.
(b) Sei $\varphi\colon (G, \cdot) \to (H, \odot)$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon (H, \odot) \to (G, \cdot)$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus ist.