Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

1. Übungsblatt für die Woche vom 4. bis 8. März 2019

Aufgabe 1.1. (a) Wiederhole die Definition eines geordneten Körpers.
(b) Gib zwei Beispiele geordneter Körper an.
(c) Erkläre, warum Quadrate in geordneten Körpern stets größer oder gleich 0 sind.
(d) Erkläre, warum in jedem geordneten Körper $-1 < 0 < 1$ gilt.
(e) Erkläre, warum auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper macht.

Aufgabe 1.2. Sei K ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
(i) P is abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
(ii) P ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
(iii) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.

Zeige, dass K mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

Aufgabe 1.3. Unter einer strengen Totalordnung auf einer Menge X verstehen wir eine transitive Relation $<$ auf X, die folgende Eigenschaft (Trichotomie) besitzt. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ tritt genau einer (und nur einer) der folgenden drei Fälle ein:

$$\text{entweder } x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x.$$

(a) Sei $\leq$ eine Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y$$

eine strenge Totalordnung auf X definiert ist.
(b) Sei $<$ eine strenge Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

eine Totalordnung $\leq$ auf X definiert ist.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 1.4. Seien K und L zwei Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to L$ wird Körperhomomorphismus genannt, wenn für alle $x, y \in K$ folgende drei Gleichungen gelten:

(a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
(c) $\varphi(1) \neq 0$

Zeige, dass in diesem Fall für alle $x \in K$ weiters gilt:

(d) $\varphi(0) = 0$
(e) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
(f) $\varphi(1) = 1$
(g) Ist $x \neq 0$, dann auch $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Aufgabe 1.5. Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. Zeige der Reihe nach:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$. Hinweis: Induktion nach n
(b) $\forall m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = m$
(c) $\forall q \in \mathbb{Q} : \varphi(q) = q$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Hinweis: $x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$
(f) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = x$. Hinweis: Wären $\varphi(x)$ und x verschieden, läge eine rationale Zahl zwischen ihnen.

Die identische Abbildung ist daher der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.6. Gib einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, d.h. einen Körperhomomorphismus, der verschieden von der identischen Abbildung ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1.1. (a) Ein geordneten Körper ist ein Quadrupel $(K, +, \cdot, \leq)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.
(ii) $\leq$ ist eine Totalordnung auf K.
(iii) Die Ordnungsrelation ist mit der Addition in folgendem Sinn verträglich: $\forall x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
(iv) Die Ordnungsrelation ist mit der Multiplikation in folgendem Sinn verträglich: $\forall x, y \in K : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

(b) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation sind Beispiele geordneter Körper.

(c) Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper und $x \in K$. Es ist $0 \leq x^2$ zu zeigen. Wegen der Totalität der Ordnung genügt es zwei Fälle zu unterscheiden: $0 \leq x$ oder $x \leq 0$. Im ersten Fall erhalten wir aus der Veräglichkeit mit der Multiplikation sofort $0 \leq x^2$. Im zweiten Fall folgt aus der Verträglichkeit mit der Addition zunächst $0 \leq -x$ und dann $0 \leq (-x)^2 = x^2$ wie zuvor. In jedem Fall gilt $0 \leq x^2$.

(d) Aus (c) erhalten wir $0 \leq 1^2 = 1$. Da $0 \neq 1$ gilt sogar die strikte Ungleichheit $0 < 1$. Wegen der Verträglichkeit mit der Addition folgt daraus auch $-1 < 0$.

(e) Indirekt angenommen $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ einen geordneten Körper bildet. Dann gilt $0 \leq \mathbf{i}^2 = -1 < 0$ nach (c) und (d). Da dies der Antisymmetrie widerspricht, kann es keine solche Relation $\leq$ geben.

Zu Aufgabe 1.2. Wir zeigen zunächst, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation ist. Um die Transitivität einzusehen, seien $x, y, z \in K$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$. Es gilt daher $y - x \in P$ und $z - y \in P$. Mit (i) erhalten wir $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$, also $x \leq z$. Die Relation ist reflexiv, denn nach (iii) gilt $x - x = 0 \in P$. Um die Antisymmetrie einzusehen, sei $x \leq y$ und $y \leq x$. Es gilt daher $y - x \in P$ und $x - y \in P$. Somit $x - y \in P \cap (-P) = \{0\}$, siehe (iii), also $x - y = 0$ und daher $x = y$.

Wir zeigen nun, dass $\leq$ eine Totalordnung auf K bildet. Seien dazu $x, y \in K$. Nach der ersten Gleichung in (iii) muss $y - x \in P$ oder $y - x \in -P$ gelten. Im ersten Fall erhalten wir $x \leq y$; im zweiten Fall zunächst $x - y \in P$ und daher $y \leq x$.

Verträglichkeit mit der Addition ist offensichtlich, denn $(y + z) - (x + z) = y - x$. Veträglichkeit mit der Multiplikation folgt unmittelbar aus (ii).

Zu Aufgabe 1.3. (a) Wir zeigen zunächst, dass $<$ transitiv ist. Seien dazu $x, y, z \in X$, $x < y$ und $y < z$. Es gilt daher $x \leq y$ und $x \neq y$ sowie $y \leq z$ und $y \neq z$. Aus der Transitivität von $\leq$ erhalten wir $x \leq z$. Wäre $x = z$, erhielten wir aus der Antisymmetrie von $\leq$ den Widerspruch $x = y$. Also muss $x \neq z$ und daher $x < z$ gelten. Damit ist die Transitivität von $<$ gezeigt.

Um die Trichotomie zu zeigen, seien $x, y \in X$. Da $\leq$ eine Totalordung ist, gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Ist $x \neq y$, dann folgt $x < y$ oder $y < x$. Dies zeigt, dass wenigstens einer der drei Fälle eintreten muss. Wäre $x < y$ und $y < x$, erhielten wir aus der Antisymmetrie von $\leq$ den Widerspruch $x = y$. Dies zeigt, dass sich die drei Fälle gegenseitig ausschließen.

(b) Die Relation $\leq$ ist offensichtlich reflexiv.

Um die Transitivität einzusehen, seien $x \leq y$ und $y \leq z$. Ist $x = y$ oder $y = z$ erhalten wir sofort $x \leq z$. Ist $x \neq y$ und $y \neq z$, dann $x < y$ und $y < z$, also $x < z$ wegen der Transitivität von $<$. In jedem Fall erhalten wir $x \leq z$, also ist $\leq$ transitiv.

Um die Antisymmetrie von $\leq$ einzusehen, sei $x \leq y$ und $y \leq x$. Wäre $x \neq y$, erhielten wir $x < y$ und $y < x$, was der Trichotomie von $<$ widerspricht. Also muss $x = y$ gelten und $\leq$ daher antisymmetrisch sein.

Aus der Trichotomie von $<$ folgt sofort, dass $\leq$ eine Totalordnung ist.

Zu Aufgabe 1.4. Aus (a) erhalten wir zunächst

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0),$$

also $0 = \varphi(0)$. Damit folgt

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x),$$

also $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Aus (b) erhalten wir zunächst

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1),$$

also $1 = \varphi(1)$, denn $\varphi(1) \neq 0$ nach (c). Für $x \neq 0$ erhalten wir daraus

$$1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}),$$

also $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Zu Aufgabe 1.5. Wir verwenden die in Aufgabe 1.4 zusammengestellten Eigenschaften von Körperhomomorphismen, ohne weiter darauf hinzuweisen.

(a) Dies folgt mittels Induktion nach n. Aus $\varphi(n) = n$ erhalten wir nämlich

$$\varphi(n + 1) = \varphi(n) + \varphi(1) = n + 1.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Es existieren daher $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $m = n_2 - n_1$. Mit (a) folgt

$$\varphi(m) = \varphi(n_2 + (-n_1)) = \varphi(n_1) + \varphi(-n_2) = \varphi(n_2) - \varphi(n_1) = n_2 - n_1 = m.$$

(c) Sei $q \in \mathbb{Q}$. Es existieren daher $m, n \in \mathbb{Z}$, sodass $n \neq 0$ und $q = m \cdot n^{-1}$. Mit (b) folgt

$$\varphi(q) = \varphi(m \cdot n^{-1}) = \varphi(m) \cdot \varphi(n^{-1}) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)^{-1} = m \cdot n^{-1} = q.$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}$ mit $x = y^2$. Wir erhalten

$$\varphi(x) = \varphi(y^2) = \varphi(y)^2 \geq 0.$$

(e) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \geq y$. Dann ist $x - y \geq 0$. Aus (d) folgt

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \geq 0,$$

also $\varphi(x) \geq \varphi(y)$.

(f) Indirekt angenommen $x \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x) \neq x$. Es muss daher $\varphi(x) > x$ oder $\varphi(x) < x$ gelten. Im ersten Fall existiert $q \in \mathbb{Q}$, sodass $\varphi(x) > q \geq x$. Mit (c) und (e) folgt aus der zweiten Ungleichung sofort $q = \varphi(q) \geq \varphi(x)$, was der ersten Ungleichung widerspricht. Analog führt die Annahme $\varphi(x) < x$ auf einen Widerspruch. Es muss daher $\varphi(x) = x$ gelten.

Zu Aufgabe 1.6. Die komplexe Konjugation liefert einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Dies folgt aus den bekannten Relationen $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, die für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten. Beachte auch $\bar{1} = 1 \neq 0$ sowie $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

2. Übungsblatt für die Woche vom 11. bis 15. März 2019

Aufgabe 2.1. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige mathematische Beispiele.

Aufgabe 2.2. Sei H eine nicht leere Menge und $+\colon H \times H \to H$ eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften. Für alle $a, b, c \in H$ gelte:

(i) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
(iii) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Ein neutrales Element oder additive Inverse (Gruppenaxiome) werden nicht vorausgesetzt.

(a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Quotientenmenge mit $G := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
(b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf G eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
(c) Zeige, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 2.3. In der Situation von Aufgabe 2.2 sei $c \in H$ fix. Betrachte die Abbildung

$$\iota\colon H \to G, \qquad \iota(a) := [a + c, c].$$

(a) Zeige, dass ι nicht von der Wahl von c abhängt.
(b) Zeige, dass ι ein Homomorphismus ist, d.h. $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für $a, b \in H$.
(c) Zeige, dass ι injektiv ist. Wir können daher H mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$ identifizieren.
(d) Zeige, dass jedes $g \in G$ von der Form $g = \iota(a) - \iota(b)$ ist, für geeignete $a, b \in H$.
(e) Zeige, dass ι bijektiv ist, wenn wir mit einer Gruppe H beginnen. In diesem Fall liefert die Konstruktion also nichts Neues.

Aufgabe 2.4. In der Situation von Aufgabe 2.2 setzen wir weiters voraus:

(iv) Sind $a, b \in H$, dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: Entweder existiert $x \in H$ mit $a + x = b$; oder $a = b$; oder es existiert $x \in H$ mit $a = b + x$.

Zeige, dass in dieser Situation folgendes gilt:

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(a) $\iota(a) \neq 0$, für alle $a \in H$.
(b) $\iota(a) \neq -\iota(b)$ für alle $a, b \in H$.
(c) Zu jedem $g \in G \setminus \{0\}$ existiert $a \in H$ mit $g = \iota(a)$ oder $g = -\iota(a)$.

Identifizieren wir H via ι mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$, dann gilt also

$$G \setminus \{0\} = (-H) \cup H \qquad \text{und} \qquad (-H) \cap H = \emptyset,$$

wobei $-H = \{-a : a \in H\}$.

Aufgabe 2.5. In der Situation von Aufgabe 2.2 nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \qquad a(bc) = (ab)c, \qquad \text{und} \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

(a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf G eine Operation wohldefiniert ist.
(b) Zeige, dass $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.6. In der Situation von Aufgabe 2.5 zeige weiters:

(a) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
(b) Zeige $\iota(ac) = \iota(a)\iota(c)$ für $a, c \in H$.
(c) Zeige, dass der Ring G ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

Aufgabe 2.7. Wenden wir obige Konstruktion auf $H = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ an, erhalten wir $G = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition, vgl. Einführung in die Mathematik. Wir wollen hier eine direktere (aber weniger elegante) Konstruktion von $\mathbb{Z}$ skizzieren. Dazu fixieren wir $o \notin \mathbb{N}$ und zu jedem $a \in \mathbb{N}$ ein $a' \notin \{o\} \cup \mathbb{N}$ so, dass $a' \neq b'$ für alle $a \neq b$ gilt. Wir betrachten nun

$$Z := \{a' : a \in \mathbb{N}\} \cup \{o\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, 3', 2', 1', o, 1, 2, 3, \dots\}$$

und dehnen die Addition von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $+\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $g + o := g$ und $o + g := g$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$a' + b' := (a + b)'$$

$$a' + b := \begin{cases} x & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x' & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$a + b' := \begin{cases} x' & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass $(Z, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Da der Beweis des Assoziativgesetzes eine unangenehme Fallunterscheidung erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$a' + (b + c) = (a' + b) + c,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.8. In der Situation von Aufgabe 2.7 dehnen wir nun auch die Multiplikation von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $\cdot\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $og := o$ und $go := o$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a'b := (ab)', \qquad ab' := (ab)' \qquad \text{und} \qquad a'b' := (ab)'.$$

Zeige, dass $(Z, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Da der Beweis der Assoziativ- und Distributivgesetze umfangreiche Fallunterscheidungen erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$(a'b)c = a'(bc) \qquad \text{und} \qquad (a' + b)c = a'c + bc,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 2.1. vgl. Vorlesung Einführung in die Mathematik

Zu Aufgabe 2.2. a) Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Um die Transitivität einzusehen, sei $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'')$. Es gilt daher $a+b' = a'+b$ und $a' + b'' = a'' + b'$. Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$a + b'' + (a' + b') = a'' + b + (a' + b').$$

Mit der Kürzungsregel folgt $a + b'' = a'' + b$, also $(a, b) \sim (a'', b'')$.

b) Seien $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$. Es gilt daher $a+b' = a'+b$ und $c+d' = c'+d$. Addition der beiden Gleichung führt auf

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d).$$

Somit $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$, also $[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$.

c) Kommutativität der Addition auf G folgt sofort aus der Kommutativität auf H:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b].$$

Assoziativität der Addition auf G folgt ebenso aus der Assoziativität auf H:

$$\begin{aligned}([a, b] + [c, d]) + [e, f] &= [a + c, b + d] + [e, f] = [(a + c) + e, (b + d) + f]\\ &= [a + (c + e), b + (d + f)] = [a, b] + [c + e, d + f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f]).\end{aligned}$$

Für beliebige $a, b, c \in H$ gilt $[a, b]+[c, c] = [a+c, b+c] = [a, b]$, denn $(a+c)+b = a+(b+c)$. Somit ist $0 := [c, c]$ neutrales Element der Addition. Beachte $[c, c] = [c', c']$ für beliebige $c, c' \in H$, denn $c + c' = c' + c$. Schließlich gilt $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b] = 0$, also ist $[b, a]$ das additive Inverse von $[a, b]$, d.h. $-[a, b] = [b, a]$.

Zu Aufgabe 2.3. a) Es gilt $[a + c, c] = [a + c', c']$, denn $(a + c) + c' = (a + c') + c$.

b) Es gilt

$$\iota(a) + \iota(b) = [a + c, c] + [b + c, c] = [a + b + (c + c), (c + c)] = \iota(a + b).$$

c) Ist $\iota(a) = \iota(b)$, dann gilt $[a + c, c] = [b + c, c]$, also $a + (c + c) = b + (c + c)$ und mit der Kürzungsregel folgt $a = b$.

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\iota(a) - \iota(b) &= [a + c, c] - [b + c, c] = [a + c, c] + [c, b + c]\\ &= [a + (c + c), b + (c + c)] = [a, b]\end{aligned}$$

e) Ist H eine Gruppe, dann ist ι wegen (b) ein Gruppenhomomorphismus und daher $\iota(a) - \iota(b) = \iota(a-b)$ für alle $a, b \in H$. Zusammen mit (d) zeigt dies, dass ι surjektiv ist. Wegen (c) ist ι auch injektiv, also bijektiv.

Zu Aufgabe 2.4. a) Ist $\iota(a) = 0$, dann gilt $[a+c, c] = [c, c]$, also $a + (c+c) = c + c$, was der Eindeutigkeitsaussage in Voraussetzung (iv) widerspricht. Also muss $\iota(a) \neq 0$ gelten.

b) Ist $\iota(a) = -\iota(b)$, dann gilt $[a+c, c] = [c, b+c]$, also $(a+b) + (c+c) = c + c$, was der Eindeutigkeitsaussage in Voraussetzung (iv) widerspricht. Also muss $\iota(a) \neq -\iota(b)$ gelten.

c) Sei $g = [a, b]$. Da $g \neq 0$ muss $a \neq b$ gelten. Nach Voraussetzung (iv) existiert daher $x \in H$, sodass $a + x = b$ oder $a = b + x$. Im ersten Fall erhalten wir $g = [a, b] = [a, a+x] = -[a+x, a] = -\iota(x)$. Im zweiten Fall erhalten wir $g = [a, b] = [b+x, b] = \iota(x)$.

Zu Aufgabe 2.5. a) Seien $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$. Es gilt daher

$$a + b' = a' + b \qquad \text{und} \qquad c + d' = c' + d.$$

Somit auch:

$$\begin{aligned} ac + b'c &= a'c + bc & \qquad a'c + a'd' &= a'c' + a'd \\ a'd + bd &= ad + b'd & \qquad b'c' + b'd &= b'c + b'd' \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen in jeder Spalte und Umsortieren der Summanden führt auf:

$$(ac + bd) + (a'd + b'c) = (a'c + b'd) + (ad + bc),$$
$$(a'c + b'd) + (a'd' + b'c') = (a'c' + b'd') + (a'd + b'c),$$

Dies bedeutet:

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c + b'd, a'd + b'c]$$
$$[a'c + b'd, a'd + b'c] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

Kombination der beiden Gleichngen liefert

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c'],$$

also ist die Multiplikation wohldefiniert.

b) Die Kommutativität der Multiplikation auf G folgt aus der Kommutativität der Multiplikation auf H, denn

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] = [ca + db, cb + da] = [c, d] \cdot [a, b].$$

Die Multiplikation auf G is assoziativ, denn

$$\begin{aligned} \big([a, b] \cdot [c, d]\big) \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] \cdot [e, f] \\ &= [(ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot \big([c, d] \cdot [e, f]\big) &= [a, b] \cdot [ce + df, cf + de] \\ &= [a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)] \end{aligned}$$

stimmen wegen des Assoziativ- und Distributivgesetzes in H überein.

Die Multiplikation auf G is distributiv, denn

$$[a, b] \cdot \big([c, d] + [e, f]\big) = [a, b] \cdot [c + e, d + f] = [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]$$

und

$$[a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f]=[ac+bd,ad+bc]+[ae+bf,af+be]$$
$$=[ac+bd+ae+bf,ad+bc+af+be]$$

wegen des Distributivgesetzes in H überein.

Zu Aufgabe 2.6. a) Es gilt:

$$\iota(a)\cdot[c,d]=[a+b,b]\cdot[c,d]=[(a+b)c+bd,(a+b)d+bc]=[ac+(bc+bd),ad+(bc+bd)]=[ac,ad].$$

b) Mit (a) folgt:

$$\iota(a)\cdot\iota(c)=\iota(a)\cdot[c+d,d]=[a(c+d),ad]=[ac+ad,ad]=\iota(ac).$$

c) Ist 1 multiplikatives neutrales Element in H, dann ist $\iota(1)$ Einselement in G, siehe (a).

Zu Aufgabe 2.7. Die Verknüpfung $+\colon Z\times Z\to Z$ ist wohldefiniert, da für $a,b\in\mathbb{N}$ stets genau einer der folgenden drei Fälle eintritt: Entweder existiert $x\in\mathbb{N}$ mit $a+x=b$; oder $a=b$; oder es existiert $x\in\mathbb{N}$ mit $a=b+x$. Darüber hinaus ist x im ersten und dritten Fall eindeutig.

Offensichtlich ist o neutrales Element der Addition auf Z. Für $a\in\mathbb{N}$ gilt nach Definition $a'+a=o=a'+a$, d.h. a' ist Inverses von a und umgekehrt. Da auch $o+o=o$, besitzt jedes Element von Z ein additives Inverses. Die Addition auf Z ist offensichtlich kommutativ.

Um $a'+(b+c)=(a'+b)+c$ zu überprüfen, unterscheiden wir folgende Fälle:

(1) Ist $a+x=b$ für ein $x\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $a+(x+c)=b+c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=x+c=(a'+b)+c.$$

(2) Ist $a=b$, dann gilt auch $a+c=b+c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=c=o+c=(a'+b)+c.$$

(3) Ist $a=b+x$ für ein $x\in\mathbb{N}$, unterscheiden wir drei Unterfälle:

(a) Ist $a+y=b+c$ für ein $y\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $x+y=c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=y=x'+c=(a'+b)+c.$$

(b) Ist $a=b+c$, dann gilt auch $x=c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=o=x'+c=(a'+b)+c.$$

(c) Ist $a=(b+c)+y$ für ein $y\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $x=c+y$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=y'=x'+c=(a'+b)+c.$$

In jedem Fall gilt also $a'+(b+c)=(a'+b)+c$.

Zu Aufgabe 2.8. Die Kommutativität der Multiplikation folgt sofort aus der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Etwa gilt

$$a'b=(ab)'=(ba)'=ba' \qquad \text{und} \qquad a'b'=ab=ba=b'a'$$

für $a,b\in\mathbb{N}$. Offensichtlich ist 1 neutrales Element bezüglich der Multiplikation. Weiters

$$(a'b)c=(ab)'c=((ab)c)'=(a(bc))'=a'(bc).$$

Um $(a'+b)c=a'c+bc$ zu überprüfen, unterscheiden wir drei Fälle:

(1) Ist $a+x=b$ für ein $x \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{N}$ auch $ac+xc=bc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = xc = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

(2) Ist $a=b$ dann gilt auch $ac=bc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = oc = o = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

(3) Ist $a=b+x$ für ein $x \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{N}$ auch $ac=bc+xc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = x'c = (xc)' = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

In allen Fällen haben wir $(a'+b)c = a'c + bc$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

3. Übungsblatt für die Woche vom 18. bis 22. März 2019

Aufgabe 3.1. Leite aus den Inzidenzaxiomen I1 bis I3 folgende Eigenschaften ab:
(a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
(b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
(c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
(d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

Aufgabe 3.2. Zeige, dass das Innere einer Strecke stets unendlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass durch jeden Punkt unendlich viele Geraden laufen.

Aufgabe 3.4. (a) Zeige, dass das Innere einer Strecke konvex ist.
(b) Zeige, dass offene Halbgeraden konvex sind.
(c) Zeige, dass offene Halbebenen konvex sind.

Aufgabe 3.5. (a) Zeige, dass $[AB]$ konvex ist, für je zwei Punkte A und B.
(b) Zeige, dass abgeschlossene Halbgeraden konvex sind.
(c) Schlage eine Definition abgeschlossener Halbebenen analog zur Definition abgeschlossener Halbstrahlen vor und zeige, dass abgeschlossene Halbebenen konvex sind.

Aufgabe 3.6. (a) Zeige, dass Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind.
(b) Zeige, dass das Innere eines Winkels konvex ist.
(c) Zeige, dass das Innere eines Dreiecks konvex ist.
(d) Schlage eine Definition abgeschlossener Dreiecke vor (Inneres und "Rand") und zeige, dass abgeschlossene Dreiecke konvex sind.

Aufgabe 3.7. Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ vier Punkte, sodass $(AB) = (CD)$. Zeige, dass in dieser Situation schon $\{A, B\} = \{C, D\}$ gelten muss, d.h. entweder $A = C$ und $B = D$ oder $A = D$ und $B = C$. Hinweis: Zeige, dass keiner der drei Fälle $A * C * B$, $A * B * C$, $C * A * B$ eintreten kann und schließe daraus $C = A$ oder $C = B$.

Aufgabe 3.8. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken (BC') und $(B'C)$ im Inneren des Winkels $\angle CAB$ treffen. Hinweis: Wende, wie in der Vorlesung, Axiom A4 an.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 3.1. (a) Sei X ein Punkt. Nach Axiom I3 existieren drei verschiedene Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. Wir nehmen zunächst an, dass diese drei Punkte alle verschieden von X sind. Da A, B, C nicht kollinear sind, können die Geraden $g(X, A)$, $g(X, B)$, $g(X, C)$ nicht alle übereinstimmen. Also gibt es wenigstens zwei verschiedene Geraden durch X. Stimmt einer der drei Punkte A, B, C mit X überein, nehmen wir o.B.d.A. $X = A$ an und sehen, dass die Geraden $g(X, B)$ und $g(X, C)$ verschieden sind.

(b) Nach Axiom I3 existieren drei verschiedene Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. Zusammen mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 folgt $g(A, B) \cap g(B, C) = \{B\}$ und analog für zyklische Vertauschung von A, B und C. Da die drei Punkte verschieden sind folgt $g(A, B) \cap g(B, C) \cap g(C, A) = \emptyset$.

(c) folgt aus (b).

(d) folgt sofort aus Axiom I3 und wurde nur aus Dualitätsgründen aufgenommen.

Zu Aufgabe 3.2. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Innere einer Strecke stets nicht leer ist. Rekursiv können daher Punkte $A_1 \in (AB)$ und $A_{n+1} \in (A_n B)$ gewählt werden, $n \in \mathbb{N}$. Mittels Induktion nach m folgt $A_m \in (A_n B) \subseteq (AB)$, und daher insbesondere $A_m \neq A_n$, für alle $m > n$. Also sind $A_1, A_2, \dots$ paarweise verschiedene Punkte in (AB). Dabei geht folgende aus der Vorlesung bekannte Tatsache ein: Ist $D \in (CE)$, dann auch $(CD) \subseteq (CE) \supseteq (DE)$.

Zu Aufgabe 3.3. Sei A ein Punkt und g eine Gerade, die A nicht enthält. Nach der vorangehenden Aufgabe existieren auf g unendlich viele paarweise verschiedene Punkte $B_1, B_2, \dots$. Für $i \neq j$ sind die Geraden $g(A, B_i)$ und $g(A, B_j)$ verschieden, denn A liegt nicht auf $g(B_i, B_j) = g$. Somit sind $g(A, B_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unendlich viele paarweise verschiedene Geraden durch A.

Zu Aufgabe 3.4. (a) Seien $X, Y \in (AB)$. Es genügt $(XY) \subseteq (AB)$ zu zeigen. O.B.d.A. sei $X \neq Y$. Aus der Vorlesung ist $(AB) \setminus \{X\} = (AX) \cup (XB)$ bekannt, also muss Y in (AX) oder (XB) liegen. O.B.d.A. sei $Y \in (XB)$. Es folgt $(XY) \subseteq (XB) \subseteq (AB)$.

(b) Sei h eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O und Trägergeraden k. Weiters seien $X, Y \in h$. Es genügt $(XY) \subseteq h$ zu zeigen. Sei dazu $Z \in (XY)$. Da X und Y auf der selben Seite von O in k liegen, gilt $O \notin (XY)$ und insbesondere $Z \in k \setminus \{O\}$. Wegen $(XZ) \subseteq (XY)$ gilt also auch $O \notin (XZ)$. Somit liegen X und Z auf der selben Seite von O in k, also $Z \in h$.

(c) Sei g eine Gerade und ε eine Seite von g. Weiters seien $X, Y \in \varepsilon$. Es genügt $(XY) \subseteq \varepsilon$ zu zeigen. Sei dazu $Z \in (XY)$. Da X und Y auf der selben Seite von g liegen trifft (XY) die Gerade g nicht. Insbesondere liegt Z nicht auf g. Wegen $(XZ) \subseteq (XY)$ kann also auch (XZ) die Gerade g nicht treffen. Daher liegen X und Z auf der selben Seite von g, also $Z \in \varepsilon$.

Zu Aufgabe 3.5. (a) Seien $X, Y \in [AB]$. Es genügt $(XY) \subseteq [AB]$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in (AB), so folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(a). Stimmen X und Y beide mit A oder B überein, ist die Aussage trivial. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X = A$ und $Y \in (AB)$ zu betrachten. In diesem Fall haben wir $(XY) = (AY) \subseteq (AB) \subseteq [AB]$.

(b) Seien $A \neq B$ und betrachte die abgeschlossene Halbgerade $\bar{h} = [AB\rangle$. Weiters seien $X, Y \in \bar{h}$. Es genügt $(XY) \subseteq \bar{h}$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in h folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(b). Stimmen X und Y beide mit A überein ist die Aussage trivial. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X = A$ und $Y \in h$ zu betrachten. Dieser Fall ist aber durch die Bemerkung 1.2.23 aus der Vorlesung abgedeckt.

(c) Unter einer abgeschlossenen Halbebene verstehen wir jede Menge der Form $\bar{\varepsilon} = g \cup \varepsilon$ wobei ε eine Seite einer Geraden g bezeichnet. Seien $X, Y \in \bar{\varepsilon}$. Es genügt $(XY) \subseteq \bar{\varepsilon}$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in ε, so folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(c). Liegen X und Y beide in g, so folgt dies aus $(XY) \subseteq g \subseteq \bar{\varepsilon}$. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X \in g$ und $Y \in \varepsilon$ zu betrachten. Dieser Fall ist aber durch die Bemerkung 1.2.25 aus der Vorlesung abgedeckt.

Zu Aufgabe 3.6. (a) Seien K_1 und K_2 zwei konvexe Mengen und $X, Y \in K_1 \cap K_2$. Insbesondere liegen X und Y in K_1, also $[XY] \subseteq K_1$ aufgrund der Konvexität von K_1. Analog folgt $[XY] \subseteq K_2$. Wir erhalten $[XY] \subseteq K_1 \cap K_2$, also ist $K_1 \cap K_2$ konvex. Das selbe Argument zeigt, dass beliebige Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind, d.h. sind K_i konvexe Mengen, $i \in I$, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} K_i$ konvex.

(b) Das Innere eines Winkels wurde als Durchschnitt zweier offener Halbebenen definiert. Da Halbebenen konvex sind folgt (b) aus (a).

(c) lässt sich analog zu (b) zeigen, denn das Innere eines Dreiecks wurde als Durchschnitt dreier offener Halbebenen definiert.

(d) Sei ABC ein Dreieck. Bezeichne ε_A die Seite von $g(B, C)$, die A enthält und $\bar{\varepsilon}_A = g(B, C) \cup \varepsilon_A$ die entsprechende abgeschlossene Halbebene. Analog seien die abgeschlossenen Halbebenen $\bar{\varepsilon}_B$ und $\bar{\varepsilon}_C$ definiert. Unter dem Abschluss des Dreiecks ABC verstehen wir die Menge $\bar{\varepsilon}_A \cap \bar{\varepsilon}_B \cap \bar{\varepsilon}_C$. Als Durchschnitt konvexer Mengen ist dies konvex.

Zu Aufgabe 3.7. Da das Innere einer Strecke wenigstens zwei Punkte enthält, müssen die Punkte A, B, C und D auf einer Geraden g liegen.

$A * C * B$ ist nicht möglich, denn in dieser Situation haben wir $C \in (AB)$ aber $C \notin (CD)$, was $(AB) = (CD)$ widerspricht. Analog ist auch $D * B * C$ nicht möglich, es muss daher $D \in [BC>$ gelten.

$A * B * C$ ist nicht möglich, denn in dieser Situation erhielten wir den Widerspruch

$$(AB) \cap (CD) \subseteq <AB) \cap [BC> = \emptyset.$$

Dabei haben wir die aus der Vorlesung bekannte Tatsache $(AB) \subseteq <AB)$ verwendet und auch die Konvexität der Halbstrahlen, aus der wir $(CD) \subseteq [BC>$ erhalten.

Durch Vertauschen der Rollen von A und B sehen wir, dass auch $C * A * B$ nicht eintreten kann. Nach Axiom A3 bleiben daher nur die beiden Möglichkeiten $C = A$ oder $C = B$. Analog folgt $D = A$ oder $D = B$ und somit $\{A, B\} = \{C, D\}$.

Zu Aufgabe 3.8. Axiom A4 auf das Dreieck ABC' und die Gerade $g(B', C)$ angewandt liefert $g(B', C) \cap (BC') \neq \emptyset$. Axiom A4 auf das Dreieck $AB'C$ und die Gerade $g(B, C')$ angewandt liefert $g(B, C') \cap (B'C) \neq \emptyset$. Da $g(B', C)$ und $g(B, C')$ verschieden sind schneiden sie sich also in genau einem Punkt, der in $(BC') \cap (B'C)$ liegen muss. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass beide Strecken, und damit auch ihr Schnittpunkt, im Inneren des Winkels $\angle CAB$ liegen.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

4. Übungsblatt für die Woche vom 25. bis 29. März 2019

Aufgabe 4.1. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A*B*B'$ und $A*C*C'$. Zeige, dass sich die Strecken $[BC]$ und $[B'C']$ nicht schneiden. Hinweis: Verwende Axiom A4 oder Proposition 1.2.9.

Aufgabe 4.2. Seien AB und CD zwei Strecken. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(a) Es existiert $X \in (CD)$ mit $AB \equiv CX$.
(b) Es gilt $|AB| < |CD|$, d.h. es existiert $c \in \mathcal{P}$ mit $|AB| + c = |CD|$.
Dabei bezeichnet $\mathcal{P}$, wie in der Vorlesung, die Menge der Kongruenzklassen von Strecken (positive Streckenlängen).

Aufgabe 4.3. Sei X ein Punkt im Inneren eines Winkels $\angle AOB$. Zeige, dass dann der gesamte Halbstrahl $(OX\!>$ im Inneren dieses Winkels liegt.

Aufgabe 4.4. Seien h, k, l, r vier, vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:
(a) h und l bilden einen Winkel und k liegt im Inneren von $\angle(h, l)$.
(b) h und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Zeige, dass dann auch folgende beiden Aussagen zutreffen:
(c) k und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(k, r)$.
(d) k liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Hinweis: Zeige, dass eine Gerade existiert, die alle vier Halbstrahlen schneidet und wende Lemma 1.2.26 auf die Schnittpukte an.

Aufgabe 4.5 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.
(a) Zeige, dass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ Winkel bilden.
(b) Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel. Zeige, dass V konvex ist.
(c) Zeige, dass die Diagnalen (AC) und (BD) in V liegen.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 4.6 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ Winkel bilden. Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel.

(a) Skizziere eine Situation, in der $(AC) \cap (BD) = \emptyset$ und $V = \emptyset$ gilt.
(b) Sei nun $V \neq \emptyset$. Zeige, dass sich (AC) und (BD) in genau einem Punkt treffen.

Aufgabe 4.7. Bezeichne $\mathcal{K}$, wie in der Vorlesung, die abelsche Gruppe, die wir aus den Kongruenzklassen von Strecken durch Hinzunehmen der additiven Inversen gewonnen haben. Zeige:

(a) Für $a, b \in \mathcal{K}$ gilt: $2a = 2b \Rightarrow a = b$.
(b) Für $a, b \in \mathcal{K}$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $na = nb \Rightarrow a = b$.

Dabei verwenden wir die Abkürzungen $2a := a + a$ und $na := a + \cdots + a$, wobei die zweite Summe aus n Summanden besteht. Hinweis: An dieser Stelle ist noch unklar, ob in $\mathcal{K}$ durch 2 oder n dividiert werden kann. Verwende stattdessen die Ordnungsrelation.

Aufgabe 4.8. Sei A eine abelsche Gruppe. Für $a \in A$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichne $na := a + \cdots + a$ und $(-n)a := -(a + \cdots + a)$, wobei beide Summen aus genau n Summanden bestehen. Insbesondere ist $1a = a$ und $(-1)a = -a$. Weiters sei $0a := 0$. Damit ist na für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in A$ definiert.

(a) Zeige, dass die Gleichung $n(a + b) = na + nb$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A$ gilt.
(b) Zeige, dass die Gleichung $(n + m)a = na + ma$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ gilt.
(c) Gib eine abelsche Gruppe A und $a, b \in A$ an, für die $a \neq b$ aber $2a = 2b$ gilt.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 4.1. Bezeichne g die Gerade durch B' und C'. Es gilt $g \cap [AB] = \emptyset$, denn $g \cap g(A, B) = \{B'\}$, aber $B' \notin [AB]$ da $A * B * B'$, vgl. Axiom A3. Ebenso gilt $g \cap [AC] = \emptyset$. Mit Axiom A4 erhalten wir auch $g \cap [BC] = \emptyset$. Da $[B'C'] \subseteq g$, folgt $[B'C'] \cap [BC] = \emptyset$. Alternativ lässt sich dies auch aus Proposition 1.2.9, angewandt auf die Gerade $g(B, C)$ und das Dreieck $AB'C'$, ableiten.

Zu Aufgabe 4.2. Für die eine Implikation sei zunächst $X \in (CD)$ und $AB \equiv CX$. Es gilt daher $C * X * D$ und $|AB| = |CX|$. Direkt aus der Definition der Addition erhalten wir $|CD| = |CX| + |XD| = |AB| + |XD|$, also $|AB| < |CD|$, denn $|XD| \in \mathcal{P}$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $|AB| < |CD|$. Nach Axiom K2 existiert auf der Seite von C in $g(C, D)$, die D enthält, ein (eindeutiger) Punkt X mit $CX \equiv AB$. Da D und X auf der selben Seite von C liegen, muss nach Axiom A3 einer der folgenden Fälle eintreten: $C * X * D$, oder $X = D$ oder $C * D * X$. Wäre $X = D$, erhielten wir $|AB| = |CX| = |CD|$, was $|AB| < |CD|$ widerspricht. Wäre $C * D * X$, erhielten wir aus dem bereits Gezeigten $|CD| < |CX| = |AB|$, was ebenfalls $|AB| < |CD|$ widerspricht. Somit bleibt nur der Fall $C * X * D$, also $X \in (CD)$.

Zu Aufgabe 4.3. Da X und B auf der selben Seite von $g(O, A)$ liegen, liegt ganz $(OX>$ auf dieser Seite von $g(O, A)$, siehe Bemerkung 1.2.24. Da X und A auf der selben Seite von $g(O, B)$ liegen, liegt auch $(OX>$ auf dieser Seite von $g(O, B)$. Damit liegt $(OX>$ im Durchschnitt dieser beiden Halbebenen, d.h. im Inneren des Winkels $\angle AOB$.

Zu Aufgabe 4.4. Wähle $A \in r$ und $D \in h$. Da l im Inneren von $\angle(h, r)$ liegt, schneidet (AD) den Strahl l in einem Punkt B, siehe Proposition 1.2.36. Da k im Inneren von $\angle(h, l)$

liegt, schneidet (BD) den Strahl k in einem Punkt C. Nach Konstruktion gilt $A * B * D$ und $B * C * D$. Mit Lemma 1.2.26(b) folgt $A * B * C$ und $A * C * D$. Lägen k und r in einer Geraden, dann müsste auch B und damit ganz l in dieser Geraden liegen, aber dies widerspricht der Voraussetzung, dass k im Inneren von $\angle(h, l)$ liegt. Somit bilden k und r einen Winkel. Nach Bemerkung 1.2.35 liegt (AC) im Inneren des Winkels $\angle(k, r)$. Da $B \in (AC)$ folgt, dass B und damit ganz l im Inneren von $\angle(k, r)$ liegt, vgl. Aufgabe 4.3. Analog sehen wir, dass auch $C \in (AD)$, und damit der gesamte Halbstrahl k, im Inneren von $\angle(h, r)$ liegt.

Zu Aufgabe 4.5. Nach Voraussetzung ist (AC) nicht leer, also $A \neq C$. Um zu zeigen, dass $\angle ABC$ einen Winkel bildet, nehmen wir indirekt $B \in g(A, C)$ an. Läge D nicht auf $g(A, C)$, dann läge (BD) zur Gänze auf einer Seite dieser Geraden, siehe Bemerkung 1.2.25, und wir erhielten den Widerspruch $(AC) \cap (BD) = \emptyset$. Also muss auch D auf $g(A, C)$ liegen. Eine einfache Fallunterscheidung zeigt, dass der Durchschnitt $(AC) \cap (BD)$ leer ist oder aus dem Inneren einer Strecke, also mindestens zwei Punkten besteht. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass dieser Durchschnitt aus genau einem Punkt besteht. Somit kann B nicht auf $g(A, C)$ liegen, also bildet $\angle ABC$ einen Winkel. Analog folgt, dass auch $\angle BCD$, $\angle CDA$ und $\angle DAB$ Winkel bilden.

(b) Als Durchschnitt konver Mengen ist V konvex.

(c) Nach Bemerkung 1.2.35 liegt (AC) im Inneren der Winkel $\angle ABC$ und $\angle CDA$. Ebenso liegt (BD) im Inneren der Winkel $\angle BCD$ und $\angle DAB$. Bezeichnet X den Schnittpunkt von (AC) und (BD), dann liegt X also im Inneren aller vier Winkel. Nach Aufgabe 4.3 liegt daher $(AC>$ im Inneren des Winkels $\angle DAB$ und $<AC)$ liegt im Inneren von $\angle BCD$. Damit liegt $(AC) = \, <AC) \cap (AC>$ im Inneren aller vier Winkel, also $(AC) \subseteq V$. Analog folgt $(BD) \subseteq V$.

Zu Aufgabe 4.6. (a) Es genügt, A und D so auf verschiedenen Seiten von $g(B, C)$ zu wählen, dass weder B noch C auf $g(A, D)$ liegt.

(b) Da sich die Inneren von $\angle DAB$ und $\angle ABC$ schneiden, müssen C und D auf der selben Seite von $g(A, B)$ liegen. Ebenso, liegen D und A auf der selben Seite von $g(B, C)$. Somit liegt D im Inneren des Winkels $\angle ABC$. Also liegt auch der Halbstrahl $(BD>$ im Inneren von $\angle ABC$, vgl. Aufgabe 4.3. Nach Proposition 1.2.36, schneiden sich (AC) und $(BD>$ in einem Punkt X. Analog, trifft (AC) auch den Halbstrahl $<BD)$. Dieser Schnittpunkt muss mit X übereinstimmen, denn die Geraden $g(A, C)$ und $g(B, D)$ sind verschieden. Wir erhalten $X \in \, <BD) \cap (BD> = (BD)$, also $(AC) \cap (BD) = \{X\}$.

Zu Aufgabe 4.7. (a) Sei $2a = 2b$. Wir nehmen indirekt $a \neq b$ an. O.B.d.A. sei $a < b$. Mit Korollar 1.3.10 folgt $a + a < a + b < b + b$, also $2a < 2b$. Da dies der Voraussetzung $2a = 2b$ widerspricht, muss also $a = b$ gelten.

(b) Sei $na = nb$. Wie in (a) nehmen wir indirekt $a \neq b$ und o.B.d.A. $a < b$ an. Mittels Induktion nach n lässt sich $na < nb$ zeigen. Für den Beweis des Induktionsschritts beachte, dass wir aus $na < nb$ mit Korollar 1.3.10 auch $(n+1)a = na + a < nb + a < nb + b = (n+1)b$ erhalten. Da $na < nb$ der Voraussetzung $na = nb$ widerspricht, muss also $a = b$ gelten.

Zu Aufgabe 4.8. (a) Für $n \geq 1$ erhalten wir:

$$n(a+b) = \underbrace{(a+b) + \cdots + (a+b)}_{n \text{ Summanden}} = \underbrace{(a + \cdots + a)}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{(b + \cdots + b)}_{n \text{ Summanden}} = na + nb.$$

Für $n \leq -1$ folgt analog:

$$n(a+b) = -\underbrace{\big((a+b)+\cdots+(a+b)\big)}_{-n \text{ Summanden}} = -\underbrace{(a+\cdots+a)}_{-n \text{ Summanden}} - \underbrace{(b+\cdots+b)}_{-n \text{ Summanden}} = na + nb.$$

Für $n = 0$ ist die Aussage trivial: $0(a+b) = 0 = 0 + 0 = 0a + 0b$.

(b) Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Sind n und m beide positiv, dann gilt $n + m > 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{a+\cdots+a}_{m \text{ Summanden}} = \underbrace{a+\cdots+a}_{n+m \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Sind n und m beide negativ, dann gilt $n + m < 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = -\underbrace{(a+\cdots+a)}_{-n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{-(a+\cdots+a)}_{(-n)+(-m)=-(n+m) \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Ist n oder m gleich 0, so ist die Aussage trivial. Wir betrachten nun n und m mit unterschiedlichen Vorzeichen. O.B.d.A. sei $m < 0 < n$. Gilt $n = -m$ erhalten wir:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = 0 = 0a = (n+m)a.$$

Ist $n > -m$ dann gilt $n + m > 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{a+\cdots+a}_{n-(-m)=n+m \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Ist $n < -m$ dann gilt $m + n < 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{-(a+\cdots+a)}_{-m-n=-(n+m) \text{ Summanden}} = (n+m)a$$

(c) Das einfachste Beispiel ist wohl $A = \mathbb{Z}_2$, $a = \bar{0}$, $b := \bar{1}$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

5. Übungsblatt für die Woche vom 1. bis 5. April 2019

Aufgabe 5.1. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AB \equiv AC$. Weiters seien $B' \in (BC)$ und $C' \in (B'C)$ so, dass $BB' \equiv CC'$. Zeige, dass $AB'C'$ ein gleichschenkeliges Dreieck bildet.

Aufgabe 5.2. Seien AB und $A'B'$ zwei Strecken, die nicht in einer Geraden liegen und denselben Mittelpunkt M besitzen. Es gilt daher $MA \equiv MB$ und $MA' \equiv MB'$.
(a) Zeige $AA' \equiv BB'$.
(b) Sei weiters $A'' \in (AA')$ und bezeichne B'' den Schnittpunkt von $g(A'', M)$ mit (BB'). Zeige $MA'' \equiv MB''$.

Aufgabe 5.3. Seien A, B, A', B' vier Punkte, sodass je drei ein Dreieck bilden. Weiters sei das Dreieck $AA'B$ kongruent zum Dreieck $BB'A$. Zeige, dass dann auch die Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ kongruent sind.

Aufgabe 5.4. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

Aufgabe 5.5. Sei ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Hinweis: O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt daher $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Verwende den Satz vom Außenwinkel und die Tatsache, dass im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, und umgekehrt.

Bisher haben wir $|AB|$ nur für Strecken AB definiert, im degenerierten Fall setzen wir nun $|AA| := 0$. Es gilt daher $A = B \Leftrightarrow |AB| = 0$.

Aufgabe 5.6. Seien A, B, C drei beliebige Punkte, $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$.
(a) Zeige, $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ und $c \leq a + b$. Hinweis: Aufgrund der Dreiecksungleichung der Vorlesung können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden.

Beispiele unter http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html

(b) Für $X \in (AB)$ zeige $|CX| \leq \max\{a, b\}$. Hinweis: Nach Aufgabe 5.5 können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden. Erkläre, warum einer der Fälle $C * X * B$, $C = X$ oder $A * X * C$ eintreten muss und diskutiere diese Fälle einzeln.

Aufgabe 5.7. Sei M ein Punkt und $r > 0 \in \mathcal{P}$. Betrachte die Mengen (Kreisscheiben)

$$K := \{X \in \mathcal{E} : |MX| < r\} \qquad \text{und} \qquad \bar{K} := \{X \in \mathcal{E} : |MX| \leq r\}.$$

Zeige, dass K und $\bar{K}$ konvex sind. Hinweis: Verwende Aufgabe 5.6(b).

Aufgabe 5.8. Sei OAB ein gleichschenkeliges Dreieck mit $OA \equiv OB$. Seien A' und B' zwei weitere Punkte auf den Schenkeln, sodass $O * A' * A$ und $O * B' * B$ und $A'A \equiv B'B$ gilt. Bezeichne X den Schnittpunkt von (AB') und $(A'B)$, vgl. Aufgabe 3.8. Weiters sei M der Schnittpunkt von $g(O, X)$ mit (AB). Fertige eine Skizze an und zeige der Reihe nach:
(a) Die Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ sind kongruent.
(b) Die Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ sind kongruent.
(c) Die Dreiecke OAX und OBX sind kongruent.
(d) Die Dreiecke OMA und OMB sind kongruent.

Schließe daraus, dass $(OX>$ die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle AOB$ ist und M mit dem Mittelpunkt der Strecke AB übereinstimmt.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 5.1. Da die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks kongruent sind, gilt $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind daher die Dreiecke ABB' und ACC' kongruent. Insbesondere erhalten wir $AB' \equiv AC'$, also ist das Dreieck $AB'C'$ gleichschenkelig.

Zu Aufgabe 5.2. (a) Da Scheitelwinkel kongruent sind haben wir $\angle AMA' \equiv \angle BMB'$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind daher die Dreiecke AMA' und BMB' kongruent. Insbesondere erhalten wir $AA' \equiv BB'$.

(b) Der Schnittpunkt B'' existiert, da der Halbstrahl $A''(M>$ im Inneren des Winkels $\angle BMB'$ liegt und daher die Sehne (BB') treffen muss. Wieder gilt $\angle AMA'' \equiv \angle BMB''$, denn dies sind Scheitelwinkel. Aus der Kongruenz der Dreiecke AMA' und BMB' in (a) erhalten wir auch $\angle MAA' \equiv \angle MBB'$ und daher $\angle MAA'' \equiv \angle MBB''$. Nach dem WSW Kongruenzsatz sind die Dreiecke AMA'' und BMB'' daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $MA'' \equiv MB''$.

Zu Aufgabe 5.3. Dies folgt unmittelbar aus dem SSS Kongruenzsatz. Nach Voraussetzung gilt nämlich $A'A \equiv B'B$ und $AB' \equiv BA'$. Da die beiden Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ die Seite $A'B'$ gemein haben, müssen also sie kongruent sein.

Zu Aufgabe 5.4. Eine Möglichkeit dies zu formulieren, wäre: *Ist AB eine Strecke und sind C und C' zwei Punkte auf derselben Seite von $g(A, B)$, die $AC \equiv AC'$ und $BC \equiv BC'$ genügen, dann gilt schon $C = C'$.* Zum Beweis: Aus dem SSS Kongruenzsatz folgt $\angle CAB \equiv \angle C'AB$ und dann $C = C'$ mit den Eindeutigkeitsaussagen der Axiome K5 und K2.

Zu Aufgabe 5.5. O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Da der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, haben wir

$$\sphericalangle CAB \leq \sphericalangle CBA,$$

siehe Satz 1.4.25 falls $|CB| < |CA|$ bzw. Satz 1.4.4 falls $|CB| = |CA|$. Nach dem Satz von Außenwinkel gilt

$$\sphericalangle CBA < \sphericalangle CXA.$$

Kombinieren wir die beiden Ungleichungen, folgt $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CXA$ und daher auch

$$\sphericalangle CAX < \sphericalangle CXA.$$

Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber liegt, erhalten wir $|CX| < |CA|$.

Zu Aufgabe 5.6. (a) O.B.d.A. seien die Punkte A, B, C kollinear, vgl. Satz 1.4.26. Fallen zwei der drei Punkte zusammen, dann sind alle drei Ungleichungen trivialerweise erfüllt. Gilt etwa $A = B$, so ist $0 \leq a = b$ und $c = 0$, also $a \leq b = b + 0 = b + c$, $b \leq a = 0 + a = c + a$ sowie $c = 0 \leq a + b$. O.B.d.A. seien daher A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. O.B.d.A. genügt es den Fall $A*C*B$ zu betrachten, vgl. Axiom A3. Es gilt daher $0 < a < c$, $0 < b < c$ und $c = a + b$. Wir erhalten $a < c < b + c$, $b < c < c + a$ und $c \leq a + b$.

(b) O.B.d.A. seien die Punkte A, B, C kollinear, vgl. Aufgabe 5.5. Da $X \in (AB)$ erhalten wir die Zerlegung

$$g(A, B) = {<}AX) \cup \{X\} \cup (XB{>}.$$

Der Punkt C muss daher in einer der drei Mengen ${<}AX)$, $\{X\}$ oder $(XB{>}$ liegen. Somit muss einer der folgenden drei Fälle eintreten:

$$C * X * B \qquad \text{oder} \qquad C = X \qquad \text{oder} \qquad A * X * C.$$

Im Fall $C * X * B$ erhalten wir $|CX| < |CB| = a$. Im Fall $C = X$ erhalten wir $|CX| = 0$. Im Fall $A * X * C$ erhalten wir $|CX| < |CA| = b$. In jedem Fall gilt daher $|CX| \leq \max\{a, b\}$.

Zu Aufgabe 5.7. Seien A und B zwei Punkte in K. Es genügt $(AB) \subseteq K$ zu zeigen. Sei dazu $X \in (AB)$. Nach Voraussetzung gilt $|MA| < r$ und $|MB| < r$. Aus Aufgabe 5.6(b) erhalten wir $|MX| \leq \max\{|MA|, |MB|\} < r$, also $X \in K$.

Analog kann bei der (abgeschlossenen) Kreisscheibe $\bar{K}$ vorgegangen werden, alle strikten Gleichheitszeichen müssen dann durch $\leq$ ersetzt werden.

Zu Aufgabe 5.8. (a) Die Kongruenz der Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ folgt aus dem SWS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite AB gemein, nach Voraussetzung gilt $AA' \equiv BB'$ und die Basiswinkel des gleichschenkeligen Dreiecks AOB sind kongruent, d.h. $\angle OAB \equiv \angle OBA$.

(b) Die Kongruenz der Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ folgt aus dem SWW Kongruenzsatz, denn nach Voraussetzung gilt $AA' \equiv BB'$, aus (a) erhalten wir $\angle AA'X \equiv \angle BB'X$ und die Scheitelwinkel sind kongruent, d.h. $\angle A'XA \equiv \angle B'XB$.

(c) Die Kongruenz der Dreiecke OAX und OBX folgt aus dem SSS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite OX gemein, es gilt $OA \equiv OB$ nach Voraussetzung und $AX \equiv BX$ nach (b).

(d) Die Kongruenz der Dreiecke OMA und OMB folgt aus dem SWS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite OM gemein, nach Voraussetzung gilt $OA \equiv OB$ und aus (c) erhalten wir $\angle AOM \equiv \angle BOM$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

6. Übungsblatt für die Woche vom 8. bis 12. April 2019

AUFGABE 6.1. Sei AB ein Strecke. Wähle auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ zwei Punkte C und D so, dass $\angle CAB \equiv \angle DBA$ und $AC \equiv BD$. Bezeichne den Schnittpunkt von $g(A, B)$ und $g(C, D)$ mit M. Fertige eine Skizze an und zeige, dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Gehe anschließend näher auf folgende Punkte ein:

(a) Warum können Punkte C und D so gewählt werden?
(b) Warum haben $g(A, B)$ und $g(C, D)$ genau einen Schnittpunkt?
(c) Warum kann M nicht mit A oder B zusammenfallen? (Satz vom Außenwinkel)
(d) Warum liegt M im Inneren der Strecke AB?

AUFGABE 6.2 (Streckensymmetrale). Sei AB eine Strecke mit Mittelpunkt M und bezeichne g das Lot auf $g(A, B)$ durch M. Zeige

$$g = \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

In den nächsten Beispielen verwenden wir folgende Definition: Vier Punkte ABCD werden als konvexes Viereck bezeichnet, wenn sich die Diagonalen (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden, vgl. Aufgaben 4.5 und 4.6.

AUFGABE 6.3. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zeige, dass sich die Diagonalen AC und BD in ihren Mittelpunkten schneiden. Insbesondere sind Parallelogramme konvexe Vierecke.

AUFGABE 6.4. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in ihren Mittelpunkten schneiden. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|AB| = |CD|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.6. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |DA|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.7.

(a) Skizziere ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|BC| = |DA|$, das kein Parallelogramm ist.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A,B) \| g(C,D)$, $|BC| = |DA|$ und $|AC| \leq |BC|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.8 (Winkelsumme konvexer Vierecke). Zeige, dass für die Winkelsumme eines konvexen Vierecks $ABCD$ stets

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R$$

gilt. Skizziere ein (nicht konvexes) Viereck, für das diese Gleichung nicht erfüllt ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 6.1. Nach dem SWW Kongruenzsatz sind die Dreiecke CAM und DBM kongruent, denn die Scheitelwinkel sind kongruent, d.h. $\angle AMC \equiv BMD$, und nach Konstruktion haben wir $\angle CAM \equiv \angle DBM$ sowie $CA \equiv DB$. Insbesondere gilt $MA \equiv MB$.

(a) folgt aus den Axiomen K5 und K2.

(b) C und D liegen auf verschiedenen Seiten von $g(A,B)$.

(c) Wäre $M = B$, dann wäre im Dreieck ABC der Winkel $\angle CAB$ kongruent zum gegenüberliegenden Außenwinkel $\angle ABD$, was dem Satz vom Außenwinkel widerspricht. Analog kann $M = A$ ausgeschlossen werden.

(d) Wäre $M * A * B$, dann $|MA| < |MB|$, was $MA \equiv MB$ widerspricht. Analog kann $A * B * M$ ausgeschlossen werden. Nach Axiom A3 muss daher $A * M * B$ gelten, also liegt M im Inneren der Strecke AB.

Zu Aufgabe 6.2. Wir zeigen zunächst die Inklusion

$$g \subseteq \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

Sei dazu $X \in g$. Es ist $|XA| = |XB|$ zu zeigen. O.B.d.A. sei $X \neq M$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke XMA und XMB kongruent, denn sie haben die Seite XM gemein, die Winkel $\angle XMA$ und $\angle XMB$ sind beide rechte, und $MA \equiv MB$. Insbesondere erhalten wir $|XA| = |XB|$.

Für die umgekehrten Inklusion

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\} \subseteq g$$

sei nun X ein beliebiger Punkt mit $|XA| = |XB|$. Es ist $X \in g$ zu zeigen. O.B.d.A. können wir $X \notin g(A,B)$ annehmen, denn M ist der eindeutige Punkt auf $g(A,B)$, der $|MA| = |MB|$ genügt. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke XMA und XMB kongruent, denn sie haben die Seite XM gemein, es gilt $MA \equiv MB$ und $XA \equiv XB$. Insbesondere erhalten wir $\angle XMA \equiv \angle XMB$, also ist $\angle XMA$ ein rechter Winkel. Somit ist auch $g(X,M)$ eine Gerade durch M, die senkrecht auf $g(A,B)$ steht. Aus der Eindeutigkeit des Lots erhalten wir $g = g(X,M)$ und insbesondere $X \in g$.

Zu Aufgabe 6.3. Nach Voraussetzung sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte, die Geraden $g(A,B)$ und $g(C,D)$ sind disjunkte Parallele, und auch die Geraden $g(B,C)$ und $g(D,A)$ sind disjunkte Parallele. Aus der Parallelität folgt leicht, dass C im Inneren des Winkels $\angle BAD$ liegt. Daher schneidet die Gerade $g(A,C)$ die Strecke (BD). Analog schneidet auch die Gerade $g(B,D)$ die Strecke (AC). Beachte, dass die Geraden $g(A,C)$ und $g(B,D)$ nur einen Schnittpunkt haben können, da sonst die Parallelen $g(A,B)$ und $g(C,D)$ zusammenfallen würden. Also schneiden sich die Strecken (AC) und (BD) in einem Punkt M. Da

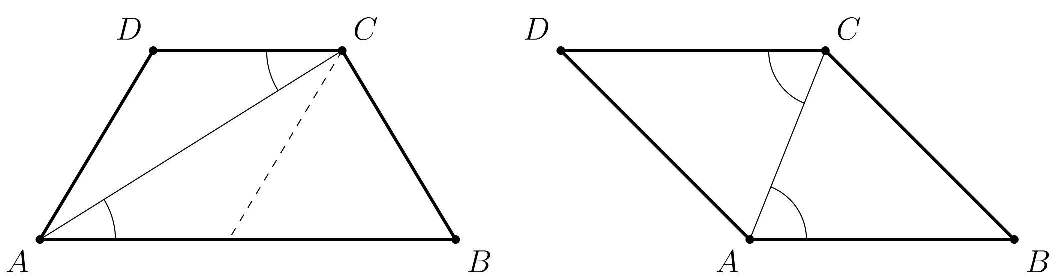
B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ liegen, bilden $\angle ACB$ und $\angle CAD$ Wechselwinkel und sind nach dem Stufenwinkelsatz daher kongruent. Analog folgt $\angle DBC \equiv \angle BDA$. In der Vorlesung haben wir bereits $|AD| = |BC|$ gezeigt. Nach dem WSW Kongruenzsatz sind die Dreiecke DMA und BMC kongruent. Insbesondere erhalten wir $MC \equiv MA$ und $MB \equiv MD$. Somit ist M Mittelpunkt von BC und auch Mittelpunkt von BD.

Zu Aufgabe 6.4. Nach Vorauussetzung gilt $(AC) \cap (BD) = \{M\}$ mit $MA \equiv MC$ und $MB \equiv MD$. Weiters haben wir $\angle BMC \equiv \angle DMA$, denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke BMC und DMA daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle BCM \equiv \angle DAM$. Also entstehen beim Schnitt von $g(A, C)$ mit $g(B, C)$ und $g(D, A)$ kongruente Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz sind $g(B, C)$ und $g(D, A)$ daher parallel. Analog lässt sich zeigen, dass $g(A, B)$ und $g(C, D)$ parallel sind.

Zu Aufgabe 6.5. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ liegen. Somit bilden $\angle BAC$ und $\angle DCA$ Wechselwinkel. Aus dem Stufenwinkelsatz erhalten wir $\angle BAC \equiv \angle DCA$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke BAC und DCA daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle BCA \equiv \angle DAC$. Somit entstehen beim Schnitt von $g(A, C)$ mit $g(B, C)$ und $g(D, A)$ kongruente Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz sind $g(B, C)$ und $g(D, A)$ daher parallel.

Zu Aufgabe 6.6. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke ABC und CDA kongruent, denn sie haben die Seite AC gemein und nach Voraussetzung gilt $AB \equiv CD$ und $BC \equiv DA$. Insbesondere erhalten wir $\angle CAB \equiv \angle ACD$. Da dies Wechselwinkel sind, folgt aus dem Stufenwinkelsatz $g(A, B) \| g(C, D)$. Ebenso erhalten aus der Kongruenz der Dreiecke $\angle ACB \equiv \angle CAD$ und mit dem Stufenwinkelsatz dann $g(B, C) \| g(D, A)$.

Zu Aufgabe 6.7. (a) Das Trapez in der Skizze liefert ein Gegenbeispiel. (b) Wie zuvor



folgt aus dem Stufenwinkelsatz $\angle CAB \equiv \angle ACD$. Wegen der weiteren Voraussetzung $|AC| \leq |BC|$ folgt mit dem WSS Kongruenzsatz, dass die Dreiecke ACB und CAD kongruent sind. Insbesondere erhalten wir $\angle ACB \equiv \angle CAD$. Nach dem Stufenwinkelsatz sind daher $g(B, C)$ und $g(D, A)$ parallel.

Zu Aufgabe 6.8. Da die Winkelsumme von Dreiecken $2R$ beträgt gilt:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 2R,$$
$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAC = 2R.$$

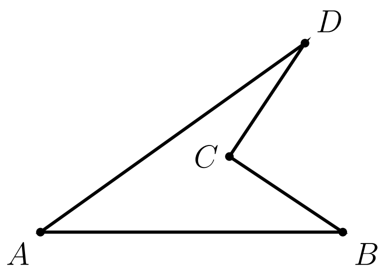
Aufgrund der Konvexität liegt C im Inneren von $\angle DAB$ und A liegt im Inneren von $\angle BCD$. Daher haben wir auch:

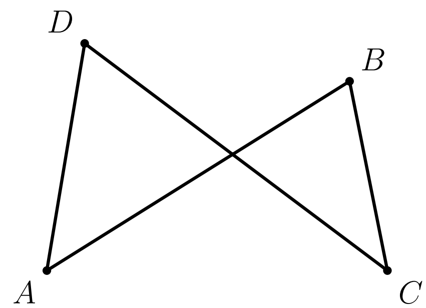
$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD,$$
$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen und anschließendes Einsetzen der anderen beiden Relationen liefert die Winkelsumme des Vierecks:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R.$$

Zwei (nicht konvexe) Vierecke, für die diese Relation nicht gilt sind unten abgebildet.





Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

7. Übungsblatt für die Woche vom 29. April bis 3. Mai 2019

AUFGABE 7.1 (S:S:S Ähnlichkeitssatz). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $a' := |B'C'|$, $b' := |C'A'|$, $c' := |A'B'|$, sodass

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

Zeige, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind, d.h. es gilt auch

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta' \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma'.$$

Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S Ähnlichkeitssatzes in der Vorlesung, lässt sich dies mit dem W:W:W Ähnlichkeitssatz auf den SSS Kongruenzsatz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

AUFGABE 7.2. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, sodass C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen. Zeige, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Hinweis: Gehe analog zur Vorlesung vor (Satz 1.5.32).

AUFGABE 7.3 (Sehnensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Wie lässt sich daraus der Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke folgern?

AUFGABE 7.4 (Sekanten-Tangentensatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem äußeren Punkt S des Kreises trifft. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ annehmen dürfen und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um die Dreiecke AST und TSB zu vergleichen. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 7.5 (Sekantensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem äußeren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen können. Verwende dann den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Gib auch einen zweiten Beweis mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Aufgabe 7.6 (Sehnenviereck). Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

Hinweis: Die eine Implikation folgt sofort aus dem Sehnensatz. Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die andere Implikation zu zeigen.

Aufgabe 7.7. Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\}$$

Vereinigung zweier orthogonaler Geraden ist. Hinweis: Verwende die Beschreibung der Winkelsymmetrale aus der Vorlesung.

Aufgabe 7.8. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es genau vier Kreise gibt, die jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 7.1. Nach dem W:W:W Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ ähnlich. Insbesondere gilt $a''/a = b''/b = c''/c$. Mit der Voraussetzung $a/a' = b/b' = c/c'$ folgt $a''/a' = b''/b' = c''/c' = 1$, also $a'' = a'$ und $b'' = b'$. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ daher kongruent. Damit ist ABC auch dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich.

Zu Aufgabe 7.2. Wir nehmen zunächst an, dass die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreis liegen. Da C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen, bilden die Tangentenwinkel zu C und D Nebenwinkel bei A, ihre Summe ist daher $2R$. Mit dem Tangentenwinkelsatz folgt $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$. Bezeichne Γ den Kreis durch A, B, C und Γ' den Kreis durch A, B, D. Mit dem Tangentenwinkelsatz sehen wir, dass sich die Tangentenwinkel für C und D bei A zu $2R$ addieren. Daher stimmen die Tangenten an Γ und Γ' bei A überein. Die Mittelpunkte beider Kreise müssen daher auf der Normalen durch A auf diese Tangente liegen. Beide Mittelpunkte müssen aber auch auf der Streckensymmetrale von AB liegen. Die Normale und die Streckensymmetrale können nicht parallel sein, denn sonst wäre nach dem Stufenwinkelsatz die Normale orthogonal auf $g(A, B)$ und die Tangente würde daher durch B laufen, was nicht möglich ist. Daher schneiden sich die Normale und die Streckensymmetrale nur in einem Punkt. Also müssen die Mittelpunkte von Γ und Γ' übereinstimmen. Da die beiden Kreise gemeinsame Punkte haben, folgt $\Gamma = \Gamma'$, also liegen alle vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreis.

Zu Aufgabe 7.3. O.B.d.A. seien A, B, A', B' vier verschiedene Punkte am Kreis. Da sich die Sehnen schneiden, liegen die Punkte B und B' auf derselben Seite von $g(A, A')$ wie S. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\angle ABA' \equiv \angle AB'A'.$$

Weiters ist $\angle ASB' \equiv \angle A'SB$, denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem W:W:W Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ASB' und $A'SB$ daher ähnlich. Insbesondere gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$, also $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$. Da in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse und die Höhe Sehnen im Umkreis bilden, liefert der Sehnensatz in diesem Fall $pq = hh$, also den Höhensatz.

Zu Aufgabe 7.4. Da die Tangente den Kreis nur in T schneidet, kann sie nicht mit $g(A, B)$ zusammenfallen. Da beide Geraden den Punkt S enthalten, kann T nicht auf $g(A, B)$ liegen. Da (AB) zur Gänze im Inneren des Kreises liegt, vgl. Aufgabe 5.5, kann S nicht zwischen A und B liegen. Da A und B am Kreis liegen, muss S auch verschieden von A und B sein. Damit bleiben nur die Fälle $S * A * B$ oder $A * B * S$ übrig. Durch Vertauschen von A mit B kann daher o.B.d.A. $S * A * B$ angenommen werden. Also liegen S und B auf verschiedenen Seiten von $g(A, T)$. Aus dem Tangentenwinkelsatz erhalten wir daher

$$\angle STA \equiv \angle SBT.$$

Da auch $\angle AST = \angle TSB$, folgt mit dem W:W:W Kongruenzsatz, dass die Dreiecke AST und TSB ähnlich sind. Insbesondere gilt $\frac{|ST|}{|SB|} = \frac{|SA|}{|ST|}$, also $|ST|^2 = |SA| \cdot |SB|$. Liegt S am Kreis, dann gilt $|ST|^2 = 0 = |SA| \cdot |SB|$, denn in diesem Fall muss $S = T = A$ oder $S = T = B$ sein.

Zu Aufgabe 7.5. O.B.d.A. seien A, B, A', B' vier verschiedene Punkte am Kreis. Durch Umbenennen der Punkte können wir o.B.d.A. auch $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen. Daher liegen B und B' auf derselben Seite von $g(A, A')$, nämlich gegenüber von S. Aus dem Peripheriewinkelsatz erhalten wir daher

$$\angle SB'A \equiv \angle SBA'.$$

Da auch $\angle ASB' = \angle A'SB$, folgt mit dem W:W:W Kongruenzsatz, dass die Dreiecke ASB' und $A'SB$ ähnlich sind. Insbesondere gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$, also $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$. Ein alternative Beweis dieser Gleichung geht wie folgt: Da S im Äußeren des Kreises liegt, existiert ein Punkt T am Kreis, sodass $g(T, S)$ Tangente ist, und wir erhalten $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2 = |SA'| \cdot |SB'|$ durch zweimaliges Anwenden der vorangehenden Aufgabe. Liegt S am Kreis, dann gilt $|SA| \cdot |SB| = 0 = |SA'| \cdot |SB'|$, denn in diesem Fall muss $S = A = A'$ oder $S = A = B'$ oder $S = B = A'$ oder $S = B = B'$ sein.

Zu Aufgabe 7.6. Die eine Implikation folgt unmittelbarr aus dem Sehnensatz. Für die umgekehrte Implikation sei nun $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$. Daher

$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SD|}{|SC|} \qquad \text{sowie} \qquad \angle ASD \equiv \angle BSC,$$

denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem S:W:S Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ASD und BSC daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle SDA \equiv \angle SCB$, also $\angle BDA \equiv \angle ACB$. Da C und D auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegen, müssen die vier Punkte A, B, C, D nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis liegen.

Zu Aufgabe 7.7. Beim Schnitt der beiden Geraden entstehen vier Winkel, deren Innere wir mit W_1, W_2, W_3, W_4 bezeichnen. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass W_1 und W_3 Scheitelwinkel bilden und daher auch W_2 und W_4 Scheitelwinkel sind. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\{X \in W_i : d(X, g) = d(X, h)\}$ mit der Winkelsymmetrale s_i von W_i übereinstimmt. Der einzige Punkt auf $g \cup h$, der von beiden Geraden denselben Abstand hat, ist ihr Schnittpunkt S. Da $\mathcal{E} = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup g \cup h$, erhalten wir

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\} = s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_4 \cup \{S\}.$$

Da W_1 und W_3 Scheitelwinkel sind und s_1 den Winkel W_1 halbiert, muss die andere Seite der Trägergeraden von s_1 den Winkel W_3 halbieren und daher mit s_3 übereinstimmen. Also bildet $s_1 \cup \{S\} \cup s_3$ eine Gerade. Ebenso ist $s_2 \cup \{S\} \cup s_4$ eine Gerade. Da s_2 den Winkel W_2 halbiert und die Winkelhälften von W_1 und W_3 gleich groß sind, haben wir $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_3, s_2)$, also ist $\angle(s_1, s_2)$ ein rechter Winkel. Daher stehen die Trägergeraden der Winkelsymmetralen orthogonal aufeinander.

Zu Aufgabe 7.8. Der Mittelpunkt eines Kreises, der $g(A, B)$ und $g(B, C)$ berührt, muss von beiden Geraden denselben positiven Normalabstand haben. Umgekehrt ist jeder Punkt, der von $g(A, B)$ und $g(B, C)$ denselben positiven Normalabstand hat, Mittelpunkt eines eindeutigen Kreises, der beide Geraden berührt. Die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren ist daher

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{E} : d(X, g(A, B)) = d(X, g(B, C)) = d(X, g(C, A))\}.$$

Beachte, dass die Normalabstände nicht alle verschwinden können, da die Punkte A, B, C nicht kollinear sind. Nach dem vorangehenden Beispiel gilt

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g(C, A)) = d(X, g(A, B))\} = g \cup g'$$

wobei g und g' die Trägergeraden der vier Winkelsymmetralen bei A bezeichnen und

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g(A, B)) = d(X, g(B, C))\} = h \cup h'$$

wobei h und h' die Trägergeraden der vier Winkelsymmetralen bei B bezeichnen. Darüber hinaus haben wir $g \perp g'$ und $h \perp h'$. Wir erhalten

$$\mathcal{M} = (g \cup g') \cap (h \cup h') = (g \cap h) \cup (g \cap h') \cup (g' \cap h) \cup (g' \cap h').$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, dass g und h die Winkelsymmetralen des Dreiecks ABC bei A und B enthalten. Daher schneiden sich g und h in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt. Die beiden Geraden g und h können nicht orthogonal sein, denn sonst würden beim Schnitt von h mit $g(A, C)$ und $g(B, C)$ kongruente Wechselwinkel entstehen, was nicht möglich ist, da $g(A, C)$ und $g(B, C)$ nicht parallel sind. Mit dem Stufenwinkelsatz folgt, dass g' und h nicht parallel sein können und sich daher in einem Punkt schneiden. Analog schneiden sich auch g und h' in einem Punkt. Eine weitere Anwendung des Stufenwinkelsatzes zeigt, dass auch g' und h' nicht parallel sein können und sich daher in einem Punkt schneiden. Wir erhalten daher genau vier Mittelpunkte und somit vier Kreise.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

8. Übungsblatt für die Woche vom 6. bis 10. Mai 2019

Aufgabe 8.1 (Euklids Tangentenkonstruktion). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt im Äußeren von Γ.

(a) Erkläre, warum die Strecke MA den Kreis Γ in einem Punkt B schneidet.
(b) Sei t die Tangente an Γ im Punkt B und bezeichne Γ' den Kreis mit Mittelpunkt M durch A. Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
(c) Erkläre, warum MC den Kreis Γ in einem Punkt D schneidet.
(d) Zeige, dass die Gerade durch A und D tangential an Γ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an Γ durch A?

Aufgabe 8.2 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei AB Durchmesser eines Kreises Γ. Weiters sei C ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

(a) Liegt C im Inneren von Γ, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt C auf Γ, dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
(c) Liegt C im Äußeren von Γ, dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne D den Schnittpunkt von Γ mit dem Radius durch C. Verwende den Satz vom Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle ADB$ zu vergleichen.

Aufgabe 8.3 (Neunpunktkreis auch Feuerbachkreis). Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Bezeichnen M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der drei Seiten, H_a, H_b, H_c die drei Höhenfußpunkte und N_a, N_b, N_c die Mittelpunkte der Höhenabschnitte HA, HB, HC. Zeige, dass die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, N_c$ auf einem Kreis liegen. Zeige dazu der Reihe nach:

(a) Die Trägergeraden der drei Strecken AB, M_aM_b und N_aN_b sind parallel.
(b) Die Trägergeraden der drei Strecken CH_c, M_aN_b und M_bN_a sind parallel.
(c) $M_aM_bN_aN_b$ bildet ein Rechteck, d.h. ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.
(d) $M_aM_cN_aN_c$ bildet ein Rechteck.
(e) Die sechs Punkte $M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c$ liegen auf dem Kreis mit Durchmesser M_aN_a.
(f) H_a liegt auch auf diesem Kreis.
(g) H_b und H_c liegen ebenfalls auf diesem Kreis.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 8.4 (Nachtrag zum Neunpunktkreis). Die Rechtecke im Beweis der vorangehenden Aufgabe können zu Strecken degenerieren.

(a) Gib ein Dreieck an, für das $C = H = H_a = H_b = N_c$, $M_a = N_b$ und $M_b = N_a$ gilt.
(b) Zeige, dass aber stets $M_a \neq M_b$, $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$ gilt.
(c) Vervollständige den Beweis in der vorigen Aufgabe im Fall degenerierter Rechtecke.
(d) Gib ein Dreieck an, für das $H_a = M_a$ gilt.
(e) Erkläre, warum stets $H_a \neq M_b$ gilt.
(f) Kann H_a mit N_a zusammenfallen?

Aufgabe 8.5 (Winkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Seite BC. Zeige:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Sei E der Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch C. Zeige

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

und verwende eine Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung.

Aufgabe 8.6 (Außenwinkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und seien D, F zwei Punkte mit $B * C * D$ und $B * A * F$. Zeige:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Dies lässt sich analog zum Winkelhalbierendensatz beweisen.

Aufgabe 8.7 (Kreis des Apollonius). Seien A und B zwei verschiedene Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\}$$

einen Kreis bildet und drücke seinen Radius durch λ und $\delta := |AB|$ aus.

Nimm zunächst $\lambda > 1$ an und gehe wie folgt vor:

(a) Erkläre, warum auf der Strecke AB genau ein Punkt C mit $|CA| = \lambda |CB|$ existiert und drücke $|CB|$ durch λ und δ aus.
(b) Erkläre, warum auf dem Strahl $A(B>$ genau ein Punkt D mit $|DA| = \lambda |DB|$ existiert und drücke $|DB|$ durch λ und δ aus.
(c) Erkläre, warum auf $g(A, B)$ keine weiteren Punkte X mit $|XA| = \lambda |XB|$ existieren.
(d) Drücke den Radius des Kreises Γ mit Durchmesser CD durch λ und δ aus.
(e) Sei X ein Punkt mit $|XA| = \lambda |XB|$, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige der Reihe nach: Der Strahl $(XC>$ halbiert den Winkel $\angle AXB$; der Strahl $(XD>$ halbiert den Winkel $\angle BXF$, wobei $A * X * F$; der Winkel $\angle CXD$ ist ein rechter; und $X \in \Gamma$. Schließe daraus:

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\} \subseteq \Gamma.$$

(f) Zeige $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$, wobei Γ' den analogen Kreis für einen weiteren Parameter λ' mit $1 < \lambda' \neq \lambda$ bezeichnet.
(g) Verwende (f), um die umgekehrte Inklusion $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\} \supseteq \Gamma$ zu zeigen.

Welche Mengen erhalten wir in den Fällen $\lambda = 1$ und $0 < \lambda < 1$.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 8.1. (a) Da A im Äußeren von Γ liegt. (b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Gerade, die einen inneren Punkt eines Kreises enthält diesen Kreis in zwei Punkten schneidet. (c) Da C im Äußeren von Γ liegt. (d) Nach dem SWS-Kongruenzsatz sind die Dreiecke AMD und CMB kongruent. Da $\angle MBC$ ein rechter Winkel ist, muss also auch $\angle MDA$ ein rechter Winkel sein. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $g(A, D)$ tangential an den Kreis ist, d.h. den Kreis nur in einem Punkt berührt. Bezeichnet C' den zweiten Schnittpunkt von Γ' mit t, und bezeichnet D' den Schnittpunkt von MC' mit Γ, so ist $g(A, D')$ die zweite Tangente durch A an Γ.

Zu Aufgabe 8.2. (b) folgt aus dem Satz von Thales. Sei nun $C \notin \Gamma$. Beachte, dass der Mittelpunkt M von Γ im Inneren von $\angle ACB$ und auch im Inneren von $\angle ADB$ liegt. Somit

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle BCM \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle ADM + \sphericalangle BDM = \sphericalangle ADB = R.$$

Liegt C im Inneren von Γ, dann folgt aus dem Satz vom Außenwinkel $\sphericalangle ACM > \sphericalangle ADM$ und $\sphericalangle BCM > \sphericalangle BDM$, also $\sphericalangle ACB > R$. Liegt C im Äußeren, erhalten wir analog $\sphericalangle ACM < \sphericalangle ADM$ und $\sphericalangle BCM < \sphericalangle BDM$, also $\sphericalangle ACB < R$.

Zu Aufgabe 8.3. (a) folgt aus dem Strahlensatz.
(b) folgt aus dem Strahlensatz.
(c) Da $g(A, B)$ normal auf $g(C, H_c)$ steht, sind die vier Winkel rechte (Stufenwinkelsatz).
(d) folgt aus (c) durch Vertauschen der Rollen von B und C, d.h. analog zu (c).
(e) folgt aus (c) und (d) mit der Umkehrung des Satzes von Thales.
(f) folgt ebenfalls aus der Umkehrung des Satzes von Thales.
(g) Auch M_bN_b und M_cN_c sind Durchmesser desselben Kreises, also liegen auch H_b und H_c auf diesem Kreis.

Zu Aufgabe 8.4. (a) Jedes Dreiecke mit rechtem Winkel $\angle BCA$ hat diese Eigenschaft.
(b) Für die Streckenmittelpunkte gilt offensichtlich $M_a \neq M_b$. Daher sind die Parallelen zu $g(H_c, C)$ durch M_a und M_b disjunkt. Da N_a auf der Parallelen durch M_b liegt, und N_b auf der Parallelen durch M_a liegt, erhalten wir $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$.
(c) Ist $M_a = N_b$, dann auch $M_b = N_a$ und alle vier Punkte liegen offensichtlich auf dem Kreis mit Durchmesser M_aN_a.
(d) Jedes gleichschenkelige Dreieck mit $|AB| = |AC|$ hat diese Eigenschaft.
(e) Da H_a und M_b auf den Trägergeraden verschiedener Dreieckseiten liegen, können sie nur übereinstimmen, wenn sie mit dem gemeinsamen Eckpunkt C zusammenfallen; es gilt aber stets $M_b \neq C$.
(f) Ja. Sei dazu ABH ein gleichschenkeliges Dreieck mit $|AB| = |HB|$ und bezeichne C seinen Höhenschnittpunkt. Ist $C \neq B$, dann bildet ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, für das $H_a = N_a$ gilt.

Zu Aufgabe 8.5. Aus dem Stufenwinkelsatz und dem Strahlensatz erhalten wir:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad &\Leftrightarrow \quad \sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE \\
&\Leftrightarrow \quad |AE| = |AC| \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Äquivalenz die Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung (Satz 1.4.4) eingegangen ist.

Zu Aufgabe 8.6. Bezeichnet E den Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch C. Dann gilt wie im Beweis des Winkelhalbierendensatzes:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle DAF &= \sphericalangle AEC && \text{Stufenwinkelsatz} \\
\sphericalangle DAC &= \sphericalangle ACE && \text{Stufenwinkelsatz} \\
\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE &\Leftrightarrow |AE| = |AC| && \text{gleichschenkelige Dreiecke} \\
\frac{|DB|}{|DC|} &= \frac{|AB|}{|AE|} && \text{Strahlensatz}
\end{aligned}$$

Der Satz über die Halbierende des Außenwinkels folgt durch Kombination dieser Tatsachen wie im Beweis des Winkelhalbierendensatzes.

Zu Aufgabe 8.7. (a) Für jeden Punkt $C \in (AB)$ gilt $|CA| + |CB| = |AB| = \delta$. Für diese Punkte ist die Bedingung $|CA| = \lambda|CB|$ daher zu $|CB| = \frac{\delta}{\lambda+1}$ äquivalent. Da $\lambda > 0$ haben wir $0 < \frac{\delta}{\lambda+1} < \delta$, also existiert genau ein solcher Punkt C im Inneren der Strecke AB.

(b) Für jeden Punkt D am Strahl $A(B>$ gilt $|DA| = |DB| + |AB| = |DB| + \delta$. Für diese Punkte ist die Bedingung $|DA| = \lambda|DB|$ daher zu $|DB| = \frac{\delta}{\lambda-1}$ äquivalent. Da $\lambda > 1$ haben wir $\frac{\delta}{\lambda-1} > 0$, also existiert genau ein solcher Punkt D am Strahl $A(B>$.

(c) Liegt X am Strahl $<A)B$, dann gilt $|XA| < |XB|$, was $|XA| = \lambda|XB| > |XB|$ widerspricht. Für $X = A$ oder $X = B$ ist die Gleichung $|XA| = \lambda|XB|$ offensichtlich nicht erfüllt.

(d) Der Durchmesser von Γ ist $|CB| + |DB| = \frac{\delta}{\lambda+1} + \frac{\delta}{\lambda-1} = \frac{2\lambda\delta}{\lambda^2-1}$, sein Radius daher $\frac{\lambda\delta}{\lambda^2-1}$.

(e) Aus dem Satz über die Winkelhalbierende erhalten wir

$$\sphericalangle BXA = 2\sphericalangle BXC.$$

Aus dem Satz über die Halbierende des Außenwinkels erhalten wir

$$\sphericalangle BXF = 2\sphericalangle BXD,$$

wobei F einen Punkt mit $A * X * F$ bezeichnet. Addition der beiden Gleichungen liefert

$$2R = \sphericalangle BXA + \sphericalangle BXF = 2(\sphericalangle BXC + \sphericalangle BXD),$$

also $R = \sphericalangle BXC + \sphericalangle BXD$. Aus der Umkehrung des Satzes von Thales folgt $X \in \Gamma$.

(f) O.B.d.A. sei $\lambda' > \lambda$. Dann gilt $|C'B| = \frac{\delta}{\lambda'+1} < \frac{\delta}{\lambda+1} = |CB|$ und $|D'B| = \frac{\delta}{\lambda-1} < \frac{\delta}{\lambda-1} = |DB|$. Daher ist der Durchmesser $[C'D']$ von Γ' zur Gänze im Durchmesser (CD) von Γ enthalten, woraus sofort $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ folgt.

(g) Sei $X \in \Gamma$. Dann gilt $|XA| = \lambda'|XB|$, wobei $\lambda' := \frac{|XA|}{|XB|} > 1$. Aus (e) erhalten wir $X \in \Gamma'$. Nach (f) ist dies nur möglich, wenn $\lambda = \lambda'$ gilt. Somit $|XA| = \lambda|XB|$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

9. Übungsblatt für die Woche vom 13. bis 17. Mai 2019

Aufgabe 9.1. (a) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.

(b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Zeige

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1.$$

Aufgabe 9.2 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

Aufgabe 9.3. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und sei O ein weiterer Punkt auf dieser Geraden, der verschieden von A, B und C ist. Zeige

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CO}{OA} = -1.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Absolutbeträge beider Seiten übereinstimmen und führe anschließend eine geeignete Fallunterscheidung durch, um auch das Vorzeichen zu überprüfen.

Aufgabe 9.4. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \| g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

Aufgabe 9.5 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B) \| g(A', B')$ und $g(B, C) \| g(B', C')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A)$ und $g(C', A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

Aufgabe 9.6 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B') \| g(B, A')$ und $g(B, C') \| g(C, B')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A')$ und $g(A, C')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 9.3.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 9.7 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a, H_b und H_c. Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

Aufgabe 9.8 (Inkreismittelpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Verwende den Winkelhalbierendensatz, siehe Aufgabe 8.5.

Aufgabe 9.9 (Odoms Konstruktion des goldenden Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A * B * C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende den Sehnensatz aus Aufgabe 7.3.

Aufgabe 9.10 (Goldenes Dreieck). Teile X die Strecke AB im goldenen Schnitt, d.h. X liege im Inneren von AB und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Sei C ein weiterer Punkt mit $|AB| = |AC|$ und $|BC| = |AX|$. Zeige, dass die Dreiecke ABC und CBX ähnlich sind und schließe daraus

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$$

sowie $5\sphericalangle CAB = 2R$ und $5\sphericalangle ABC = 4R$.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 9.1. a) Mit Lemma 2.1.8 erhalten wir sofort:

$$\frac{AB}{BC} = 3, \qquad \frac{BC}{CA} = -\frac{1}{4}, \qquad \frac{CA}{AB} = -\frac{4}{3},$$
$$\frac{CB}{BA} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{AC}{CB} = -4, \qquad \frac{BA}{AC} = -\frac{3}{4}.$$

b) Setzen wir $x := \frac{AB}{BC}$, so ist $\frac{BC}{CA} = \frac{1}{-x-1}$ und $\frac{CA}{AB} = \frac{-x-1}{x}$ nach Lemma 2.1.8, also

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = x \cdot \frac{1}{-x-1} \cdot \frac{-x-1}{x} = 1.$$

Alternativ folgt für den Absolutbetrag zunächst

$$\left|\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB}\right| = \left|\frac{AB}{BC}\right| \cdot \left|\frac{BC}{CA}\right| \cdot \left|\frac{CA}{AB}\right| = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|CA|}{|AB|} = 1.$$

Da genau einer der drei Punkte A, B, C zwischen den anderen beiden liegt, ist eines der Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$ positiv und die anderen beiden negativ. Somit ist ihr Produkt positiv und wir erhalten erneut $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1$.

Zu Aufgabe 9.2. Nach Voraussetzung ist $\frac{AB}{BC} = -\frac{CA}{AB}$, wobei das Vorzeichen aus $A*B*C$ folgt. Bezeichnet $x = \frac{AB}{BC}$ dann gilt $\frac{CA}{AB} = \frac{-x-1}{x}$ nach Lemma 2.1.8. Dies führt auf die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, also $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Da $x > 1$, folgt $|AB| > |BC|$.

Zu Aufgabe 9.3. Offensichtlich gilt

$$\left|\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA}\right| = \left|\frac{AO}{OB}\right|\cdot\left|\frac{BO}{OC}\right|\cdot\left|\frac{CO}{OA}\right| = \frac{|AO|}{|OB|}\cdot\frac{|BO|}{|OC|}\cdot\frac{|CO|}{|OA|} = 1.$$

Um das Vorzeichen zu überprüfen, unterscheiden wir zwei Fälle: Liegen die Punkte A, B, C alle auf derselben Seite von O, dann sind die drei Teilverhältnisse $\frac{AO}{OB}$, $\frac{BO}{OC}$, $\frac{CO}{OA}$ alle negativ. Liegen die Punkte A, B, C nicht auf derselben Seite von O, dann sind sind zwei dieser Teilverhältnisse positiv und das dritte negativ. In jedem Fall ist ihr Produkt negativ. Wir erhalten daher

$$\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA} = -1.$$

Zu Aufgabe 9.4. Aus dem Satz vom Außenwinkel folgt $A \neq B \neq C$, vgl. Aufgabe 6.1. Mit dem Strahlensatz erhalten wir daher

$$\left|\frac{AB}{BC}\right| = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AA'|}{|CC'|} = \frac{p}{q}.$$

Aus dem orientierten Strahlensatz bekommen wir das Vorzeichen, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'} > 0$, denn B liegt zwischen A' und C'. Somit $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Alternativ lässt sich auch mit dem Satz vom Außenwinkel zeigen, dass B zwischen A und C liegen und daher $\frac{AB}{BC} > 0$ gelten muss.

Liegen A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$, und ist $p \neq q$, erhalten wir analog $\frac{AB}{BC} = -\frac{p}{q}$. Beachte, dass die Geraden $g(A, C)$ und $g(A', C')$ genau dann parallel sind, wenn $ACC'A'$ ein Parallelogramm bildet und, dass dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn $p = |AA'| = |CC'| = q$ gilt, vgl. Aufgabe 6.5 und Satz 1.5.10.

Zu Aufgabe 9.5. Da $g(A, B)\|g(A', B')$ und $g(B, C)\|g(B', C')$ folgt aus dem orientierten Strahlensatz $\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'}$ und $\frac{BO}{OB'} = \frac{CO}{OC'}$. Somit auch $\frac{AO}{OA'} = \frac{CO}{OC'}$ und daher $g(C, A)\|g(C', A')$ wegen der umgekehrten Implikation im orientierten Strahlensatz.

Zu Aufgabe 9.6. Aus dem orientierten Strahlensatz folgt

$$\frac{AO}{OB} = \frac{B'O}{OA'} \qquad \text{und} \qquad \frac{BO}{OC} = \frac{C'O}{OB'}.$$

Aus Aufgabe 9.3 erhalten wir

$$\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA} = -1 = \frac{C'O}{OB'}\cdot\frac{B'O}{OA'}\cdot\frac{A'O}{OC'}.$$

Kombination dieser Gleichungen liefert $\frac{CO}{OA} = \frac{A'O}{OC'}$. Nach der umgekehrten Implikation im orientierten Strahlensatz sind die Geraden $g(C, A')$ und $g(A, C')$ daher parallel.

Zu Aufgabe 9.7. O.B.d.A. nehmen wir an, dass keiner der Höhenfußpunkte mit einem Eckpunkt zusammenfällt. Ist $\angle CAB$ spitz, so stimmen $\angle H_bAB$ und $\angle H_cAC$ überein, andernfalls bilden sie Scheitelwinkel. In jedem Fall haben wir $\angle H_bAB \equiv \angle H_cAC$. Da die Winkel $\angle AH_bB$ und $\angle AH_cC$ beide rechte sind, folgt aus dem W:W:W Ähnlichkeitssatz, dass die beiden Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind. Insbesondere erhalten wir $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$

und analog $\frac{|BH_c|}{|BH_a|} = \frac{|BC|}{|BA|}$ sowie $\frac{|CH_a|}{|CH_b|} = \frac{|CA|}{|CB|}$. Somit

$$\left|\frac{AH_b}{H_bC} \cdot \frac{BH_c}{H_cA} \cdot \frac{CH_a}{H_aB}\right| = \left|\frac{AH_b}{H_bC}\right| \cdot \left|\frac{BH_c}{H_cA}\right| \cdot \left|\frac{CH_a}{H_aB}\right| = \frac{|AH_b|}{|H_bC|} \cdot \frac{|BH_c|}{|H_cA|} \cdot \frac{|CH_a|}{|H_aB|}$$
$$= \frac{|AH_b|}{|AH_c|} \cdot \frac{|BH_c|}{|BH_a|} \cdot \frac{|CH_a|}{|CH_b|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|BA|} \cdot \frac{|CA|}{|CB|} = 1.$$

Ist das Dreieck ABC spitzwinkelig, so liegen alle drei Höhenfußpunkte auf den Seiten und die Teilverhältnisse $\frac{AH_b}{H_bC}$, $\frac{BH_c}{H_cA}$, $\frac{CH_a}{H_aB}$ sind daher alle positiv. Andernfalls liegen genau zwei Höhenfußpunkte außerhalb der Dreiecksseiten, also sind zwei dieser Teilverhältnisse negativ und das dritte positiv. In jedem Fall ist das Produkt der drei Teilverhältnisse positiv und wir erhalten

$$\frac{AH_b}{H_bC} \cdot \frac{BH_c}{H_cA} \cdot \frac{CH_a}{H_aB} = 1.$$

Nach dem Satz von Ceva sind die drei Höhen daher konkurrent.

Zu Aufgabe 9.8. Sei ABC ein Dreieck und bezeichnen W_a, W_b, W_c die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit den gegenüberliegenden Seiten. Nach dem Winkelhalbierendensatz gilt $\frac{|W_bA|}{|W_bC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Wir erhalten das Teilverhältnis $\frac{AW_b}{W_bC} = \frac{|BA|}{|BC|}$, denn W_b liegt im Inneren der Seite AC. Analog folgt $\frac{BW_c}{W_cA} = \frac{|CB|}{|CA|}$ und $\frac{CW_a}{W_aB} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Somit

$$\frac{AW_b}{W_bC} \cdot \frac{BW_c}{W_cA} \cdot \frac{CW_a}{W_aB} = \frac{|BA|}{|BC|} \cdot \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = 1.$$

Nach dem Satz von Ceva sind die drei Winkelsymmetralen daher konkurrent.

Zu Aufgabe 9.9. Bezeichne $a := |AB|$, $b := |BC|$ und $b' := |AC'|$, wobei C' den anderen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis bezeichnet, für den $C' * A * B$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt, dass A und B von den benachbarten Dreieckspunkten Abstand a haben. Mit dem Sehnensatz erhalten wir

$$b(a + b') = a^2 = b'(a + b).$$

Daraus folgt zunächst $b = b'$ und dann $a^2 = b(a + b)$, also $a/b = (a + b)/a$ und $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Zu Aufgabe 9.10. Aus $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$ und $|BC| = |AX|$ folgt $\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Nach dem S:W:S Ähnlichkeitssatz sind ABC und CBX ähnliche Dreiecke, denn $\angle ABC = \angle CBX$. Insbesondere erhalten wir $\sphericalangle XCB = \sphericalangle CAB$ und $\frac{|CX|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}$, also $|CX| = |CB| = |AX|$ und daher $\sphericalangle ACX = \sphericalangle CAB$. Somit

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle XCB + \sphericalangle ACX = 2\sphericalangle CAB.$$

Da die Winkelsumme im Dreieck $2R$ beträgt, folgt $5\sphericalangle CAB = 2R$ und dann $5\sphericalangle ABC = 4R$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

10. Übungsblatt für die Woche vom 20. bis 24. Mai 2019

Aufgabe 10.1. Zeige, dass zwei nicht-degenerierte lineare Gleichungen genau dann dieselbe Gerade in $\mathbb{R}^2$ beschreiben, wenn die eine ein Vielfaches der anderen ist. Seien dazu $a_1, a_2, b, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0) \neq (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 = \tilde{b} \right\}$$

genau dann gilt, wenn $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

Aufgabe 10.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in $\mathcal{E}$ mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass C auf $g := g(A,B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
(b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g, für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g, für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
(d) Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

Aufgabe 10.3 (Koordinaten des Streckenmittelpunkts). Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$ und bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke AB. Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Mittelpunkts $x(M)$ aus den Koordinaten der Endpunkte $x(A)$ und $x(B)$ berechnet werden können und beweise diese Formel.

Aufgabe 10.4. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A,B)$ und $h := g(C,D)$ auf drei verschiedene Arten:

(a) Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
(b) Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
(c) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die duch Einsetzen entsteht.

Aufgabe 10.5 (Schwerpunkt in Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu ein beliebiges affines Koordinatensystem, beschreibe die drei Schwerlinien in Koordinaten durch Parameterdarstellungen, zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden und gib eine Formel für die Koordinaten des Schwerpunkts an. Schließe daraus auch $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$, wobei M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen.

Aufgabe 10.6 (Satz von Menelaos mittels Koordinaten). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

Aufgabe 10.7 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 10.8 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Der Quotient von Teilverhältnissen $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird als Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D bezeichnet. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die entsprechende Koordinatenabbildung bezeichnet. Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 10.1. Die eine Implikation ist offensichtlich: Gilt $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$ für ein $\lambda \neq 0$, dann sind die Gleichungen $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ und $\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b}$ äquivalent und haben daher dieselbe Lösungsmenge. Für die umgekehrte Implikation sei nun

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b} \right\}.$$

Da a_1 und a_2 nicht beide verschwinden können, nehmen wir o.B.d.A. $a_2 \neq 0$ an. Dann erfüllen die Komponenten von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b/a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ (b - a_1)/a_2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$. Nach Voraussetzung müssen sie daher auch der anderen Gleichung $\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b}$ genügen und wir erhalten:

$$\tilde{a}_2 b / a_2 = \tilde{b} \qquad \text{und} \qquad \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 (b - a_1)/a_2 = \tilde{b}.$$

Subtraktion führt auf $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 a_1 / a_2$. Für $\lambda = \tilde{a}_2 / a_2$ gilt daher $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

Zu Aufgabe 10.2. a) Wir berechnen

$$x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $x(A) - x(C) = 2\big(x(B) - x(A)\big)$, also $C \in g(A, B)$ und $\frac{CA}{AB} = 2$. Analog erhalten wir $x(C) - x(A) = -\frac{2}{3}(x(B) - x(C))$ und daher $\frac{AC}{CB} = -2/3$.

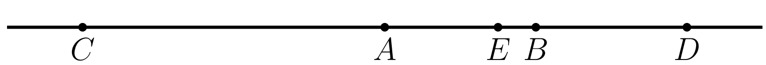
b) Für den Punkt D soll $x(A) - x(D) = -2\big(x(B) - x(A)\big)$ gelten, also

$$x(D) = x(A) + 2\big(x(B) - x(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

c) Für den Punkt E soll $x(E) - x(A) = 3\big(x(B) - x(E)\big)$ gelten, also

$$x(E) = \tfrac{1}{4} x(A) + \tfrac{3}{4} x(B) = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

d)



Zu Aufgabe 10.3. Aus $\frac{AM}{MB} = 1$ erhalten wir $x(M) - x(A) = 1 \cdot (x(B) - x(M))$, also

$$x(M) = \tfrac{1}{2}\big(x(A) + x(B)\big) = \tfrac{1}{2} x(A) + \tfrac{1}{2} x(B).$$

Zu Aufgabe 10.4. Wir berechnen Richtungsvektoren der Geraden $x(g)$ und $x(h)$,

$$x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(D) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und erhalten die Darstellungen:

$$x(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 4 \right\},$$
$$x(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + x_2 = 7 \right\}.$$

a) Die beiden Komponenten der Vektorgleichung $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ liefern das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8 + 2t &= 1 + s \\ 10 + 3t &= 4 - 3s \end{aligned}$$

mit eindeutiger Lösung $t = -3$ und $s = 1$. Für den Schnittpunkt erhalten wir

$$x(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Gleichungen der beiden Geraden führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit eindeutiger Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Wir erhalten erneut $x(S) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Einsetzen der Parameterdarstellung von $x(g)$ in die Gleichung von $x(h)$ führt auf die Gleichung

$$3(8 + 2t) + (10 + 3t) = 7$$

mit eindeutiger Lösung $t = -3$. Wir erhalten erneut $x(S) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe 10.5. Bezeichen $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Nach Aufgabe 10.3 gilt für die Koordinaten der Seitenmittelpunkte:

$$x(M_a) = \tfrac{1}{2}(x(B) + x(C)), \qquad x(M_b) = \tfrac{1}{2}(x(C) + x(A)), \qquad x(M_c) = \tfrac{1}{2}(x(A) + x(B)).$$

Die Schwerlinien haben daher die Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} &\{x(A) + t(x(M_a) - x(A)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ &\{x(B) + t(x(M_b) - x(B)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ &\{x(C) + t(x(M_c) - x(C)) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Der Parameter $t = 2/3$ führt in jeder der drei Geraden auf denselben Punkt, nämlich

$$x(S) = \tfrac{1}{3}x(A) + \tfrac{1}{3}x(B) + \tfrac{1}{3}x(C) = \tfrac{1}{3}\big(x(A) + x(B) + x(C)\big).$$

Daraus erhalten wir auch die Teilverhältnisse $\frac{SA}{AM_a} = \frac{SB}{BM_b} = \frac{SC}{CM_c} = -\frac{2}{3}$ und dann mit Lemma 2.1.8 $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$. Alternativ berechnen wir zunächst

$$x(S) - x(A) = -\tfrac{2}{3}x(A) + \tfrac{1}{3}x(B) + \tfrac{1}{3}x(C),$$
$$x(M_a) - x(S) = -\tfrac{1}{3}x(A) + \tfrac{1}{6}x(B) + \tfrac{1}{6}x(C),$$

erhalten $x(S) - x(A) = 2(x(M_a) - x(S))$ und daher $\frac{AS}{SM_a} = 2$. Analog lässt sich auch $\frac{BS}{SM_b} = 2$ und $\frac{CS}{SM_c} = 2$ direkt, d.h. ohne Verwendung von Lemma 2.1.8 verifizieren.

Zu Aufgabe 10.6. Die Punkte A', B' und C' haben Koordinaten

$$x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix}, \qquad x(B') = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = \begin{pmatrix} 1 - c' \\ c' \end{pmatrix},$$

wobei $a', b', c' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Für die Teilverhältnisse erhalten wir:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{1 - b'}{b'}, \qquad \frac{BC'}{C'A} = \frac{1 - c'}{c'}, \qquad \frac{CA'}{A'B} = \frac{a'}{1 - a'}.$$

Es gilt daher:

$$\begin{aligned} A', B', C' \text{ kollinear} &\Leftrightarrow C' \in g(A', B') \\ &\Leftrightarrow x(C') - x(A') \| x(B') - x(A') \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - c' \\ c' - a' \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -(1 - c')a' - (c' - a')b' = 0 \qquad \text{(Lemma 2.3.28)} \\ &\Leftrightarrow (1 - b')(1 - c')a' = -b'c'(1 - a') \\ &\Leftrightarrow \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 10.7. In diesen Koordinaten ist g' durch $x_2 = \lambda$ gegeben, wobei $\lambda \neq 0$. Bezeichnet $x \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung dann gilt

$$x(A') = \lambda x(A), \qquad x(B') = \lambda x(B), \qquad x(C') = \lambda x(C).$$

Multiplizieren wir

$$x(C) - x(A) = \frac{AC}{CB}\big(x(B) - x(C)\big)$$

mit λ erhalten wir daher

$$x(C') - x(A') = \frac{AC}{CB}\big(x(B') - x(C')\big),$$

also $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$.

Zu Aufgabe 10.8. Da A', B' und C' auf einer Geraden liegen sind die Vektoren

$$x(B') - x(A') = \begin{pmatrix} b' \\ b' - a' \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C') - x(A') = \begin{pmatrix} cc' \\ c' - a' \end{pmatrix}$$

parallel. Nach Lemma 2.3.28 gilt daher

$$b'(c' - a') - (b' - a')cc' = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{c'c}{b' - c'c} : \frac{c}{1-c} = \frac{c'(1-c)}{b' - c'c} = \frac{a'}{b'}.$$

Aus demselben Grund gilt $\frac{A'D'}{D'B'} : \frac{AD}{DB} = \frac{a'}{b'}$ und daher die Gleichheit der Doppelverhältnisse.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

11. Übungsblatt für die Woche vom 27. bis 31. Mai 2019

Aufgabe 11.1. Für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:
(a) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(b) $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(c) $\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$
In der Vorlesung wurde (a) gezeigt. Beweise nun (b) und (c). Leite daraus auch folgende beiden Beziehungen her:
(d) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$ (Parallelogrammgleichung)
(e) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big)$ (Polarisierungsidentität)

Aufgabe 11.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, g eine Gerade mit Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = b\}$ und P ein weiterer Punkt in $\mathcal{E}$. Leite folgende Formel für den Normalabstand her:

$$d(P,g) = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

Betrachte nun Punkte A, B, C, D, E mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix},\quad x(B) = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix},\quad x(C) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\quad x(D) = \begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix},\quad x(E) = \begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$

und bezeichne g die Gerade durch A und B.
(a) Welcher der Punkte C, D, E hat kleinsten Normalabstand von g?
(b) Gib auf jeder Seite von g einen Punkt mit Normalabstand 7 an.

Aufgabe 11.3 (Polare und Tangenten). Sei

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - M, X - M\rangle = r^2\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer, von M verschiedener Punkt, dann wird die Gerade

$$p = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle A - M, X - M\rangle = r^2\}$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

die Polare von A bezüglich Γ genannt. Zeige:

(a) Liegt A auf Γ dann ist p die Tangente bei A.
(b) Liegt A im Äußeren von Γ dann schneidet p den Kreis in zwei Punkten und dies sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten durch A an Γ.
(c) Liegt A im Inneren von Γ dann haben p und Γ leeren Schnitt.

Aufgabe 11.4. Betrachte einen Kreis Γ und zwei Punkte A, B in $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25 \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A auf Γ liegt und gib eine Gleichung der Tangente bei A an Γ an.
(b) Zeige, dass B im Äußeren von Γ liegt und bestimme Gleichungen der beiden Tangenten durch B an Γ. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Aufgabe 11.5 (Streckensymmetrale mittels kartesischer Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$s = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = |PB|\}$$

eine Gerade bildet, die orthogonal auf die Gerade $g(A, B)$ steht.

Aufgabe 11.6 (Umkreismittelpunkt mittels kartesischer Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 11.7 (Kreis des Apollonius mit kartesischen Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut (vgl. Aufgabe 8.7) zu zeigen, dass die Menge

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = \lambda |PB|\}$$

einen Kreis bildet. Drücke seinen Radius durch λ und $|AB|$ aus. Zeige auch, dass sein Mittelpunkt M auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und drücke das Teilverhältnis $\frac{AM}{MB}$ durch λ aus. Hinweis: Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Koordinatenachse liegt. Zeige, dass die definierende Gleichung von Γ zu einer Kreisgleichung äquivalent ist.

Aufgabe 11.8 (Potenzgerade in kartesischen Koordinaten). Betrachte zwei Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$p = \{P \in \mathcal{E} : |PM|^2 - r^2 = |PM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade bildet, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Leite auch eine Formel für $d(M, p)$ her, die diesen Normalabstand durch r, r' und $d := |MM'|$ ausdrückt. Hinweis: Zeige, dass die definierende Gelichung von p äquivalent zu einer linearen Gleichung ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 11.1. Da $v - w = v + (-w)$ erhalten wir aus (a)

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \langle v, -w\rangle + \|-w\|^2 = \|v\|^2 - \langle v, w\rangle + \|w\|^2,$$

also (b). Mit der Bilinearität und Symmetrie des inneren Produkts folgt

$$\langle v+w, v-w\rangle = \langle v, v-w\rangle + \langle w, v-w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle - \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2,$$

also (c). Addition von (a) und (b) liefert (d), Subtraktion führt auf (e).

Zu Aufgabe 11.2. Sei Q ein Punkt auf g. Es gilt daher $\langle n, x(Q)\rangle = b$. Mit der Formel für den Normalabstand aus der Vorlesung erhalten wir sofort

$$d(P,g) = \frac{|\langle n, x(P) - x(Q)\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - \langle n, x(Q)\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

(a) Wir berechnen einen Richtungsvektor für g,

$$x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

erhalten einen Normalvektor $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit Länge $\|n\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ und die Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = 12\}$. Mit der Formel für den Normalabstand erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(C,g) &= \frac{|\langle n, x(C)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3\cdot 3 + 4\cdot 7 - 12|}{5} = 5,\\
d(D,g) &= \frac{|\langle n, x(D)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3\cdot 14 + 4\cdot 5 - 12|}{5} = 10,\\
d(E,g) &= \frac{|\langle n, x(E)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3\cdot(-5) + 4\cdot(-12) - 12|}{5} = 15,
\end{aligned}$$

also hat C kleinsten Normalabstand von g.

(b) Die Punkte F und G mit Koordinaten

$$\begin{aligned}
x(F) &= x(A) + \frac{7}{\|n\|}n = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 58/5 \end{pmatrix}\\
x(G) &= x(A) - \frac{7}{\|n\|}n = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

haben Normalabstand 7 von g und liegen auf verschiedenen Seiten dieser Gerade.

Zu Aufgabe 11.3. (a) Liegt A auf Γ, dann ist p eine Gerade, die normal auf den Radius $A - M$ steht und durch A läuft. Also stimmt p mit der Tangente bei A überein.

(b) Mit der Formel für den Normalabstand in Aufgabe 11.2 erhalten wir

$$d(M,p) = \frac{|\langle A - M, M - M\rangle - r^2|}{\|A - M\|} = \frac{r^2}{\|A - M\|}.$$

Liegt A im Äußeren von Γ dann gilt $\|A - M\| > r$, also $d(M,p) < r$ und daher schneidet p den Kreis in zwei Punkten. Ist X ein Schnittpunkt von Γ und p dann gilt

$$\langle X - M, X - M\rangle = r^2 \qquad \text{und} \qquad \langle A - M, X - M\rangle = r^2.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}0 = r^2 - r^2 = \langle X - M, X - M\rangle - \langle A - M, X - M\rangle\\ = \langle (X - M) - (A - M), X - M\rangle = \langle X - A, X - M\rangle,\end{aligned}$$

also steht die Gerade durch X und A normal auf den Radius $X - M$ und ist daher tangential an den Kreis.

(c) Liegt A im Inneren von Γ dann gilt $\|A - M\| < r$, also $d(M, p) > r$ und daher schneidet p den Kreis Γ nicht.

Zu Aufgabe 11.4. (a) Da die Komponenten von A die Kreisgleichung erfüllen, liegt A auf Γ. Da die Tangente bei A Normalvektor $A - M = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ hat und durch A läuft, ist sie durch die Gleichung

$$3x_1 + 4x_2 = 43$$

beschrieben.

(b) Da $|MB|^2 = \|B - M\|^2 = (-3 - 2)^2 + (-7 - 3)^2 = 125 > 25$, liegt B im Äußeren von Γ. Die Polare von B ist durch die Gleichung $(-3 - 2)(x_1 - 2) + (-7 - 3)(x_2 - 3) = 25$ bzw. durch die äquivalente Gleichung

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

gegeben. Schneiden wir dies mit Γ erhalten wir zwei Schnittpunkte,

$$S_1 = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen Normalvektoren der beiden Tangenten,

$$S_1 - M = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 - M = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},$$

und erhalten die Gleichungen der beiden Tangenten,

$$x_1 = -3 \qquad \text{und} \qquad 3x_1 - 4x_2 = 19.$$

Zu Aufgabe 11.5. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen $\tilde{A} := x(A)$ und $\tilde{B} := x(B)$ die Koordinaten von A und B. Für die Koordinatendarstellung von s erhalten wir

$$x(s) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|\tilde{A} - X\| = \|\tilde{B} - X\|\}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{A} - X\| = \|\tilde{B} - X\|\\ \Leftrightarrow\quad & \|\tilde{A} - X\|^2 = \|\tilde{B} - X\|^2\\ \Leftrightarrow\quad & \|\tilde{A}\|^2 - 2\langle \tilde{A}, X\rangle + \|X\|^2 = \|\tilde{B}\|^2 - 2\langle \tilde{B}, X\rangle + \|X\|^2\\ \Leftrightarrow\quad & \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2\end{aligned}$$

Wir erhalten eine Beschreibung von $x(s)$ durch eine lineare Gleichung,

$$x(s) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2\}.$$

Somit bildet $x(s)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $\tilde{B} - \tilde{A} = x(B) - x(A)$. Daher ist s eine Gerade in $\mathcal{E}$, die normal auf $g(A, B)$ steht.

Zu Aufgabe 11.6. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und $\tilde{A} := x(A)$, $\tilde{B} := x(B)$, $\tilde{C} := x(C)$ die Koordinaten der Eckpunkte. Bezeichnet s_a die Seitensymmetrale der Seite BC, dann ist $x(s_a)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $x(C) - x(B) = \tilde{C} - \tilde{B}$, die durch den Streckenmittelpunkt mit Koordinaten $\frac{1}{2}(\tilde{B} + \tilde{C})$ läuft, siehe Aufgabe 10.3. Die Normalvektordarstellung dieser Seitensymmetrale lautet daher, siehe auch die vorangehende Aufgabe,

$$x(s_a) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{C} - \tilde{B}, X \rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{C}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2\}.$$

Für die Seitensymmetralen s_b und s_c gilt analog

$$x(s_b) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X \rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{C}\|^2\},$$
$$x(s_c) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X \rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2\}.$$

Beachte, dass die Gleichung für $x(s_c)$ das Negative der Summe der beiden Gleichungen für $x(s_a)$ und $x(s_b)$ ist, denn Addition der linken Seiten liefert

$$\langle \tilde{C} - \tilde{B}, X \rangle + \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X \rangle = \langle (\tilde{C} - \tilde{B}) + (\tilde{A} - \tilde{C}), X \rangle = -\langle \tilde{B} - \tilde{A}, X \rangle.$$

Daher liegt jeder Punkt im Durchschnitt von $x(s_a)$ und $x(s_b)$ auch auf $x(s_c)$. Also sind $x(s_a)$, $x(s_b)$ und $x(s_c)$ drei konkurrente Geraden in $\mathbb{R}^2$. Daher schneiden sich auch Streckensymmetralen s_a, s_b und s_c in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt.

Zu Aufgabe 11.7. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Kordinatenachse liegt. Bezeichnet $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die assoziierte Koordinatenabbildung, dann gilt $x(A) = 0$ und $x(B) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Für die Koordinatendarstellung von Γ erhalten wir

$$x(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \lambda \sqrt{(x_1 - b)^2 + x_2^2} \right\}.$$

Eine Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} &= \lambda \sqrt{(x_1 - b)^2 + x_2^2} \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 &= \lambda^2\big((x_1 - b)^2 + x_2^2\big) \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 &= \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda^2 b x_1 + \lambda^2 b^2 \\
&\Leftrightarrow & (\lambda^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda^2 b x_1 &= -\lambda^2 b^2 \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 - 2\tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1} x_1 &= \tfrac{-\lambda^2 b^2}{\lambda^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow & \Big(x_1 - \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}\Big)^2 + x_2^2 &= \tfrac{-\lambda^2 b^2}{\lambda^2 - 1} + \tfrac{\lambda^4 b^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \\
&\Leftrightarrow & \Big(x_1 - \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}\Big)^2 + x_2^2 &= \tfrac{\lambda^2 b^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \\
&\Leftrightarrow & (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 &= r^2
\end{aligned}$$

wobei

$$m_1 := \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}, \qquad m_2 := 0, \qquad \text{und} \qquad r := \frac{\lambda |b|}{|\lambda^2 - 1|} = \frac{\lambda |AB|}{|\lambda^2 - 1|}.$$

Wir erhalten die Darstellung

$$x(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 \right\},$$

also ist Γ ein Kreis mit Radius r, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $x(M) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ hat. Da die zweite Koordinate von M verschwindet, liegt M auf der ersten Koordinatenachse, d.h. auf der Geraden durch A und B. Schließlich

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x_1(M) - x_1(A)}{x_1(B) - x_1(M)} = \frac{m_1 - 0}{b - m_1} = -\lambda^2.$$

Zu Aufgabe 11.8. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen $\tilde{M} := x(M)$ und $\tilde{M}' := x(M')$ die Koordinaten der Mittelpunkte. Wir erhalten dir Koordinatendarstellung

$$x(p) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|\tilde{M} - X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}' - X\|^2 - (r')^2\}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{M} - X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}' - X\|^2 - (r')^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \|\tilde{M}\|^2 - 2\langle \tilde{M}, X\rangle + \|X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}'\|^2 - 2\langle \tilde{M}', X\rangle + \|X\|^2 - (r')^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle \tilde{M}' - \tilde{M}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\big(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2\big) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Darstellung

$$x(p) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{M}' - \tilde{M}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\big(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2\big)\},$$

also bildet $x(p)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $x(M') - x(M) = \tilde{M}' - \tilde{M}$. Daher ist p eine Gerade in $\mathcal{E}$, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Für den Normalabstand erhalten wir

$$\begin{aligned} d(M,p) &= \frac{|\langle \tilde{M}' - \tilde{M}, \tilde{M}\rangle - \frac{1}{2}(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2)|}{\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|-2\langle \tilde{M}' - \tilde{M}, \tilde{M}\rangle + r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2|}{2\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|^2 + r^2 - (r')^2|}{2\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}, \end{aligned}$$

wobei $d := |MM'| = \|\tilde{M}' - \tilde{M}\|$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

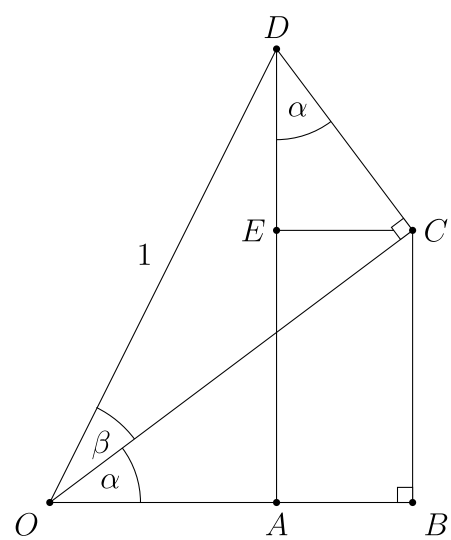
Sommersemester 2019 (UE250163)

12. Übungsblatt für die Woche vom 3. bis 7. Juni 2019

Aufgabe 12.1. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ alle zwischen 0° und 90° liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

Aufgabe 12.2.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige

$$\cos\bigl((n+1)\alpha\bigr) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos\bigl((n-1)\alpha\bigr).$$

Hinweis: Wende das Additionstheorem auf $\cos((n+1)\alpha)$ und $\cos((n-1)\alpha)$ an.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Verwende (a), um folgende Formeln zu überprüfen:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1\\ \cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\\ \cos(4\alpha) &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\\ \cos(5\alpha) &= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha\end{aligned}$$

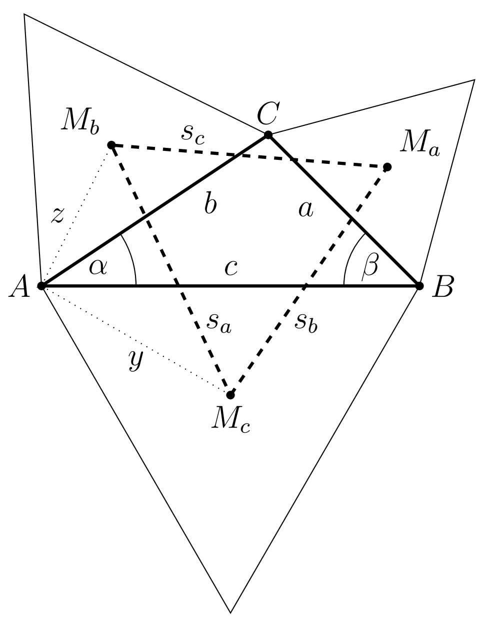
(c) Zeige mit Hilfe der letzten Formel in (b), dass

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hinweis: $\cos(5 \cdot 18^\circ) = 0$.

Aufgabe 12.3. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SSS, SWS, WSW, SWW, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

Aufgabe 12.4 (Satz von Napoleon). Werden über jeder Seite eines Dreiecks ABC außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden ihre Mittelpunkte selbst ein gleichseitiges Dreieck. Beweise diesen Satz trigonometrisch wie folgt:



(a) Zeige $b/2 = z\cos 30^\circ$, $c/2 = y\cos 30^\circ$ und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(30^\circ + \alpha + 30^\circ).$$

(b) Schließe daraus $y = c/\sqrt{3}$, $z = b/\sqrt{3}$ und

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha.$$

(c) Erkläre, wie daraus folgt:

$$3s_a^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\alpha}{a}.$$

(d) Erkläre, warum auch folgende Relationen gelten:

$$3s_b^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\beta}{b}$$
$$3s_c^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\gamma}{c}.$$

(e) Wie folgt daraus $s_a = s_b = s_c$?

Aufgabe 12.5.

(a) Seien A, B, C drei 2×2-Matrizen. Zeige $(A + B)C = AC + BC$ und $A(BC) = (AB)C$ ohne die Summenschreibweise zu verwenden.

(b) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne $(A + B)C$, $AC + BC$, $(AB)C$ und $A(BC)$ direkt, d.h. ohne Zuhilfenahme der Rechenregel in (a).

(c) Berechne A^{-1} und gib eine 2×2-Matrix X an, für die $AX = B$ gilt.

Aufgabe 12.6. Betrachte die affinen Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 + 3 \\ 2x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$
$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 7x_2 + 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(b) Gib die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(c) Berechne $\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.7. (a) Bestimme eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich eines affinen Koordinatensystems haben die Punkte P, Q, R, S Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(S) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich eines weiteren affinen Koordinatensystems haben P, Q, R Koordinaten

$$x'(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x'(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x'(R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten $x'(S)$. Hinweis: Es existiert eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$ für alle Punkte Z gilt.

Aufgabe 12.8.

(a) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 3 \right\}$ in der Form $\sigma(x) = Ax + b$ an.

(b) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 2 \right\}$ in der Form $\sigma'(x) = A'x + b'$ an.

(c) Zeige, dass die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ eine Rotation ist und bestimme ihr Zentrum sowie ihren Drehwinkel.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 12.1. Aus der Skizze lesen wir ab:

$$\begin{aligned}
|OC| &= |OD| \cos\beta = \cos\beta, \\
|CD| &= |OD| \sin\beta = \sin\beta, \\
|DE| &= |CD| \cos\alpha = \cos\alpha \sin\beta, \\
|AE| &= |BC| = |OC| \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta, \\
|OB| &= |OC| \cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta, \\
|AB| &= |EC| = |CD| \sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= |OA| = |OB| - |AB| = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\
\sin(\alpha+\beta) &= |AD| = |DE| + |AE| = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 12.2. (a) Aus dem Additionstheorem des Kosinus folgt:

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)\alpha) &= \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha \\
\cos((n-1)\alpha) &= \cos(n\alpha)\cos\alpha + \sin(n\alpha)\sin\alpha
\end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert die gesuchte Rekursionsformel.

(b) Aus der Doppelwinkelformel für den Kosinus erhalten wir

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Kombinieren wir dies mit der Formel in (a) folgt

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= 2\cos\alpha\cos(2\alpha) - \cos\alpha \\
&= 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Zweifaches Anwenden der Doppelwinkelformel des Kosinus führt auf

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) &= 2\cos^2(2\alpha) - 1\\ &= 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1\\ &= 2(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1\\ &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.\end{aligned}$$

Mit der Formel in (a) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\cos(5\alpha) &= 2\cos\alpha\cos(4\alpha) - \cos(3\alpha)\\ &= 2\cos\alpha(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\\ &= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.\end{aligned}$$

(c) Setzen wir $z := \cos 18°$, dann gilt wegen der Formel in (b)

$$0 = \cos 90° = \cos(5\cdot 18°) = 16\cos^5 18° - 20\cos^3 18° + 5\cos 18° = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$

und somit auch

$$16z^4 - 20z^2 + 5 = 0,$$

denn $z \neq 0$. Lösen dieser Gleichung führt auf

$$\cos 18° = \pm\frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Da $\sqrt{3}/2 = \cos 30° < \cos 18°$ muss $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ gelten.

Zu Aufgabe 12.3. SSS: Es sind also die Seitenlängen a, b, c gegeben und wir wollen die Winkel α, β, γ bestimmen. Das Dreieck kann nur existieren, wenn die Dreiecksungleichungen gelten. Die Dreiecksungleichungen $a < b + c$ und $b < c + a$ sind zu

$$-1 \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 1$$

äquivalent. In diesem Fall existiert daher ein (eindeutiger) Winkel $0 < \alpha < 180°$ mit

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha.$$

Nach dem Kosinussatz ist dies der Winkel bei A. Analog lassen sich die anderen Winkel berechnen, vorausgesetzt es ist auch die dritte Dreiecksungleichung $c < a + b$ erfüllt.

SWS: Mit dem Kosinussatz kann die dritte Seite berechnet werden, womit das Problem auf SSS zurückgeführt ist.

WSW und SWW: Das Dreieck kann nur existieren, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als 180° ist. Mittels $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ berechnen wir zunächst den dritten Winkel und dann mit dem Sinussatz die verbleibenden beiden Seiten.

SSW: Seien also a, b, α gegeben. Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha \geq 90°$. Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, kann das Dreieck nur existieren, wenn $a > b$. In diesem Fall gilt $0 < \frac{b}{a}\sin\alpha < 1$, also existiert genau ein Winkel $0 < \beta < 90°$ mit $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Nach dem Sinussatz ist dies der Winkel bei B. Nun zum Fall $0 < \alpha < 90°$. Ein Dreieck kann nur existieren, wenn $a > b\sin\alpha$ ist. In diesem Fall existieren (i.A. zwei) Winkel $0 < \beta < 180°$ mit $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Ist $a < b$ erhalten wir zwei Dreiecke. Ist $a \geq b$

muss auch β spitz sein und wir erhalten nur ein Dreieck. In beiden Fällen ist das Problem damit auf SWW zurückgeführt.

W:W:W: Sind die drei Winkel gegeben, können mit dem Sinussatz die Verhältnisse a/b, b/c und c/a berechnet werden. Damit sind die Dreiecksseiten bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.

Zu Aufgabe 12.4. (a) Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\sphericalangle M_bAC = 30° = \sphericalangle M_cAB$, die dritte ist der Kosinussatz im Dreieck M_bAM_c bei A.

(b) Da $\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \sin 60°$ und $\cos 60° = 1/2$ folgt dies aus (a) mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha\cos 60° - \sin\alpha\sin 60°$.

(c) Folgt durch Kombination von (b) mit dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

(d) Analog, bzw. durch Umbenennen der Eckpunkte A, B, C.

(e) Wegen des Sinussatzes: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

Zu Aufgabe 12.5. (a)

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12} + (a_{12}+b_{12})c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})c_{11} + (a_{22}+b_{22})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12} + (a_{22}+b_{22})c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC+BC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass die Eintragungen von $(A+B)C$ mit den Eintragungen von $AC+BC$ ürbereinstimmen, i.W. wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(AB)C &= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(BC) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass die Eintragungen von $(AB)C$ mit den Eintragungen von $A(BC)$ ürbereinstimmen, i.W. wegen der Assoziativ- und Distributivgesetze in $\mathbb{R}$.

(b)

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad AC + BC = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A^{-1} = \frac{1}{3\cdot 4 - 2\cdot 5}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.6. (a) Ist $\varphi(x) = Ax + b$ und $\psi(x) = A'x + b'$ dann gilt $(\psi \circ \varphi)(x) = A'(Ax+b) + b' = (A'A)x + (A'b + b')$, siehe Vorlesung. Wir haben

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A'b + b' = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\psi \circ \varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (\psi \circ \varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 - x_2 + 1 \\ -5x_1 - 2x_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $\varphi(x) = Ax + b$ und A invertierbar, dann gilt $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$, siehe Vorlesung. Wir haben

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$P = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.7. (a) Schreiben wir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dann soll gelten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + b_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} + b_1 \\ a_{21} + 2a_{22} + b_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + 3a_{12} + b_1 \\ -a_{21} + 3a_{22} + b_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies führt auf zwei lineare Gleichungssysteme in je drei Variablen:

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{12} + b_1 &= 12 & \qquad a_{21} + a_{22} + b_2 &= 9 \\
a_{11} + 2a_{12} + b_1 &= 15 & \qquad a_{21} + 2a_{22} + b_2 &= 10 \\
-a_{11} + 3a_{12} + b_1 &= 10 & \qquad -a_{21} + 3a_{22} + b_2 &= 7
\end{aligned}$$

Wir erhalten $a_{11} = 4$, $a_{12} = 3$, $b_1 = 5$ und $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $b_2 = 6$, also

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 5 \\ 2x_1 + x_2 + 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$, für alle $Z \in \mathcal{E}$. Schreiben wir $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dann muss gelten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} + b_1 \\ 2a_{21} + 3a_{22} + b_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11} + 2a_{12} + b_1 \\ 3a_{21} + 2a_{22} + b_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + b_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wie in (a) erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 4 \\ x_1 + 3x_2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Damit nun

$$x'(S) = \varphi(x(S)) = \varphi \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.8. (a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich diese Spiegelung in der Form $\sigma(x) = x - 2\langle n, x - a\rangle n$ schreiben lässt, wobei a ein Punkt der Spiegelungsachse und n ein normierter Normalvektor ist. Mit $n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x_2 + 3 \\ x_1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher $\sigma(x) = Ax + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie in (a) erhalten wir mit $n' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $a' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sofort

$$\begin{aligned} \sigma' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher $\sigma'(x) = A'x + b'$ mit

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ erhalten wir $\rho(x) = (\sigma' \circ \sigma)(x) = A'(Ax + b) + b' = (A'A)x + (A'b + b') = A''x + b''$ mit

$$\begin{aligned} A'' &:= A'A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}, \\ b'' &:= A'b + b' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachte, dass A'' die Rotationsmatrix mit Drehwinkel 90° ist. Für den Schnittpunkt der Spiegelungsachsen, $m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, gilt $\rho(m) = m$. Somit $A''m + b'' = m$, also $\rho(x) = A''x + b'' = A''(x - m) + m$. Dies zeigt, dass ρ eine Drehung um den Winkel 90° mit Zentrum m ist.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

13. Übungsblatt für die Woche vom 10. bis 14. Juni 2019

Aufgabe 13.1. Berechne alle Matrizenprodukte der Form XY, sofern sie definiert sind, wobei X und Y zwei der folgenden Matrizen bezeichnen:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&0&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\\3&0\\0&-4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0&1&4\\0&1&0&0\\0&0&3&5\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

D.h. berechne alle Produkte der Form $A^2, AB, AC, \dots, BA, B^2, BC, \dots, FD, FE, F^2$, sofern diese definiert sind.

Aufgabe 13.2. Bestimme die Ränge folgender Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-7&-14&-21\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}3&1&7\\2&2&6\\1&3&5\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}2&3&4&2\\3&6&8&4\\2&4&6&3\\1&2&3&2\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&3\\0&0&0&-2&-4&-6\\3&8&11&0&0&0\\2&6&8&0&0&0\\1&2&3&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Aufgabe 13.3. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig, welche bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, und welche bilden eine Basis? Gib in jedem Fall die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Teilraums an sowie eine Basis, die aus einigen der angegebenen Vektoren besteht.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(a) $n=2$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}.$$

(b) $n=3$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

(c) $n=4$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(d) $n=5$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\3\\6\\9\\12\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\6\\12\\18\\25\end{pmatrix}.$$

(e) $n=6$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\8\\7\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\5\\6\\2\\9\\6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\6\\10\\3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.4. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\6\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\6\end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\\8\end{pmatrix},\quad v_5=\begin{pmatrix}6\\11\\0\\24\end{pmatrix},\quad v_6=\begin{pmatrix}5\\6\\-4\\12\end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden und gib vier dieser Vektoren v_i an, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Gib auch vier dieser Vektoren an, die keine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe 13.5. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +20x_4 & = & 0\\ -3x_1 & -x_2 & -9x_3 & -20x_4 & = & 0\\ -4x_1 & -x_2 & -6x_3 & -20x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrcl} 5x_1 & -5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & & = & 0\\ 3x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +2x_4 & -8x_5 & = & 0\\ -7x_1 & +9x_2 & +13x_3 & -5x_4 & +20x_5 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.6. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +5x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & +10x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & +9x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -3x_5 & +8x_6 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & -14x_2 & +12x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -9x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +24x_2 & -21x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & -19x_2 & +16x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.7. (a) Welche Dimension muss der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems mit 13 Gleichungen in 29 Unbekannten mindestens haben?

(b) Wieviele lineare Gleichungen sind jedenfalls notwendig um einen 17-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^{23}$ zu beschreiben?

Aufgabe 13.8. Gib für jedes $k = 3, 4, 5, 6$ ein System von 3 homogenen linearen Gleichungen in sechs Variablen an, dessen Lösungsraum k-dimensional ist. Warum ist dies für $k \leq 2$ und $k \geq 7$ nicht möglich?

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 13.1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad BE = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -8 \\ 3 & 6 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \qquad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ 0 & -2 \\ 9 & -20 \end{pmatrix} \qquad EF = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad FC = \begin{pmatrix} 10 & -10 \end{pmatrix}$$

Alle anderen Produkte sind nicht definiert.

Zu Aufgabe 13.2. Mittels elementarer Zeilenumformungen bringen wir die Matrizen auf Zeilenstufenform, woraus sich dann alles ablesen lässt. Bei dieser Fragestellung ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\operatorname{rank}(A) = 1$. Da die Matrix A nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(B) = 2$ und daher ist B invertierbar.

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(C) = 1$. Da die Matrix C nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit $\operatorname{rank}(D) = 2$ und daher ist D nicht invertierbar,

(e)

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(E) = 4$ und daher ist E invertierbar.

(f)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(F) = 4$ und daher ist F invertierbar.

(g)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(G) = 3$. Da die Matrix G nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

Zu Aufgabe 13.3. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen diese mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, von der sich dann alles ablesen lässt. Auch hier ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 1-dimensional, der erste Vektor bildet eine Basis dieses Teilraums.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 3-dimensional, die ersten drei Vektor bilden eine Basis dieses Teilraums.

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 9 & 5 & 18 \\ 5 & 4 & 3 & 12 & 5 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$, lassen wir den vierten Vektor weg, erhalten wir eine Basis von $\mathbb{R}^5$.

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear unabhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^6$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 3-dimensional, sie bilden eine Basis dieses Teilraums.

Zu Aufgabe 13.4. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen diese mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, von der sich dann alles ablesen lässt. Auch hier ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 11 & 6 \\ -1 & -1 & -3 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 6 & 8 & 24 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 bilden keine Basis von $\mathbb{R}^4$, denn sie spannen nur einen 3-dimensionalen Teilraum auf.

Zu Aufgabe 13.5. (a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 20 \\ -3 & -1 & -9 & -20 \\ -4 & -1 & -6 & -20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 14 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem hat daher denselben Lösungsraum, wie das System:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & +3x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Dies (und auch das ursprüngliche System) bildet ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum, d.h. mit weniger als drei linearen Gleichungen lässt sich der Lösungsraum nicht beschreiben. Der Lösungsraum ist 1-dimensional, $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\phi(t) = t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

(b) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 2 & -8 \\ -7 & 9 & 13 & -5 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 6 & -12 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem hat daher denselben Lösungsraum, wie das System:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -5x_4 & +6x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & -3x_4 & +4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Dies (und auch das ursprüngliche System) bildet ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum, d.h. mit weniger als drei linearen Gleichungen lässt sich der Lösungsraum nicht beschreiben. Der Lösungsraum ist 2-dimensional, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des

Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, $\phi\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

Zu Aufgabe 13.6. (a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen folgendes minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum ab:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & +2x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ & & & x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum ist 4-dimensional,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$

$$\phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

(b) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -2 & -14 & 12 \\ -2 & -9 & 7 \\ 3 & 24 & -21 \\ -3 & -19 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen folgendes minimales lineares Gleichungssystem des Lösungsrsaums ab:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum ist 1-dimensional, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\phi(s) = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

Zu Aufgabe 13.7. Lässt sich ein Teilraum V von $\mathbb{R}^n$ durch m lineare Gleichungen beschreiben, so existiert eine $m \times n$-Matrix A mit $V = \ker(A)$. Da $\operatorname{img}(A)$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist, gilt $\dim \operatorname{img}(A) \leq m$ und mit der Dimensionsformel folgt (siehe Vorlesung)

$$\dim(V) = \dim \ker(A) = n - \dim \operatorname{img}(A) \geq n - m.$$

(a) Aus obiger Ungleichung erhalten wir $\dim(V) \geq n - m = 29 - 13 = 16$, d.h. der Lösungsraum muss mindestens 16-dimensional sein.

(b) Aus obiger Ungleichung erhalten wir $m \geq n - \dim(V) = 23 - 17 = 6$, also werden wenigstens 6 lineare Gleichungen benötigt.

Zu Aufgabe 13.8. Da der Lösungsraum ein Teilraum von $\mathbb{R}^6$ ist, kann er höchstens 6-dimensional sein, also $k \leq 6$. Aus der Dimensionsformel folgt weiters $k \geq 6 - 3 = 3$. Für die verbleibenden k geben wir Koeffizientenmatrizen geeigneter Gleichungssysteme an:

$k = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$k = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

14. Übungsblatt für die Woche vom 17. bis 21. Juni 2019

Aufgabe 14.1. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:
(a)

$$\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +5z & = & -2 \\ 2x & +6y & -16z & = & 2 \\ 3x & +9y & -23z & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & 8x_4 & = & 16 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -3x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & -6x_2 & -7x_3 & -2x_4 & = & -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +15x_4 & = & 34 \end{array}$$

Aufgabe 14.2. (a) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

(b) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +6x_5 & & 7x_7 & +8x_8 & = & 10 \\ & & & x_4 & +4x_5 & & +9x_7 & & = & 11 \\ & & & & & x_6 & & +5x_8 & = & 12 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 14.3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.4. Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse A^{-1} sowie eine Matrix X, für die $XA = B$ gilt.

Aufgabe 14.5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit $D := ad - bc \neq 0$. Verwende das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen und bestätige damit erneut die bekannte Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.6. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix},$$

bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch ihre Eckensummen

$$\begin{aligned} e &:= b + c + d \\ f &:= a + c + d \\ g &:= a + b + d \\ h &:= a + b + c \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt ist und drücke die Eintragungen von A durch e, f, g, h aus. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen e, f, g, h stets eine Matrix A mit diesen Eckensummen?

Aufgabe 14.8. Für welche Werte von λ sind folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende Zeilenumformungen, um die Matrzien auf Zeienstufenform zu bringen.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 14.1. Ad (a): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & -16 & 2 \\ 3 & 9 & -23 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -8 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System:

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 1 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung lautet daher $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ad (b): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 16 \\ -2 & -4 & -5 & -3 & -9 \\ -3 & -6 & -7 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 20 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & 4x_4 & = & 8 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 7 \\ & & & 0 & = & 6 \end{array}$$

Das System besitzt daher keine Lösung.

Ad (c): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 4 & 15 & 34 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & 19 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & +x_4 & = & 6 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 5 \\ & & x_3 & +3x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\phi\colon \mathbb{R} \to L, \qquad \phi(s) := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

Zu Aufgabe 14.2. (a) Durch Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -3 & -3 & -12 & -12 & -21 \\ 1 & -3 & -5 & -18 & -20 & 41 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 6 & 15 \\ -1 & 3 & 4 & 16 & 17 & 35 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -14 & -16 & -34 \\ 0 & 1 & 4 & 11 & 14 & 29 \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 13 & 28 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ein minimales lineares Gleichungssystem für L lautet daher:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & +x_4 & +x_5 & = & 4 \\ & x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 6 \end{array}$$

Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Weiters ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to L, \qquad \phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

(b) Das System liegt bereits in reduzierter Zeilenstufenform vor. Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{R}$. Weiters ist $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to L$,

$$\varphi\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\\11\\0\\12\\0\\0\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\-4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_4\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\-9\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + s_5\begin{pmatrix}-8\\0\\0\\0\\0\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

Zu Aufgabe 14.3. $A^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&1/3&0\\0&0&0&1/4\end{pmatrix}$.

Wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inversen von B zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

und erhalten $B^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inversen von C zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&5&0&0&1&0&0&0\\1&3&0&0&0&1&0&0\\0&0&3&7&0&0&1&0\\0&0&2&5&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&0&0&0&1&0&0\\2&5&0&0&1&0&0&0\\0&0&3&7&0&0&1&0\\0&0&2&5&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&-2&0&0\\0&0&3&7&0&0&1&0\\0&0&2&5&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3&-5&0&0\\0&1&0&0&-1&2&0&0\\0&0&3&7&0&0&1&0\\0&0&2&5&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3&-5&0&0\\0&1&0&0&-1&2&0&0\\0&0&1&7/3&0&0&1/3&0\\0&0&0&1/3&0&0&-2/3&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3&-5&0&0\\0&1&0&0&-1&2&0&0\\0&0&1&0&0&0&5&-7\\0&0&0&1&0&0&-2&3\end{array}\right)$$

und erhalten $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe 14.4. wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix X mit $XA = B$ zu finden, multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit A^{-1} und erhalten $X = BA^{-1}$. Daher

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 14.5. Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - bc/a & -c/a & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & D/a & -c/a & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a + bc/aD & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right)$$

und daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bei obiger Rechnung haben wir $a \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $a = 0$, dann muss $c \neq 0$ gelten und eine ähnliche Rechnung führt auf dieselbe Formel für die Inverse.

Zu Aufgabe 14.6. Die lineare Abbildung φ entspricht der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $\varphi(v) = \varphi_A(v) = Av$ für $v \in \mathbb{R}^4$, oder in Komponenten:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass φ_A genau dann bijektiv ist, wenn A invertierbar ist und, dass in diesem Fall die Umkehrabbildung der inversen Matrix entspricht, d.h. $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

Mit dem Eliminationsverfahren bestimmen wir daher die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle sehen wir, dass A tatsächlich invertierbar ist, denn der Rang der linken Seite ist 4. Durch weitere Zeilenumformungen bringen wir die linke Seite auf die Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 14.7. Wir fassen die Eckensumme als lineare Abbildung auf:

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c+d \\ a+c+d \\ a+b+d \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Mit dem Eliminationsverfahren bestimmen wir die Inverse der zugehörigen Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\3&3&3&3&1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&0&0&0&2/3&-1/3&-1/3&-1/3\\0&-1&0&0&-1/3&2/3&-1/3&-1/3\\0&0&-1&0&-1/3&-1/3&2/3&-1/3\\1&1&1&1&1/3&1/3&1/3&1/3\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&0&0&0&2/3&-1/3&-1/3&-1/3\\0&-1&0&0&-1/3&2/3&-1/3&-1/3\\0&0&-1&0&-1/3&-1/3&2/3&-1/3\\0&0&0&1&1/3&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-2/3&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&0&1/3&-2/3&1/3&1/3\\0&0&1&0&1/3&1/3&-2/3&1/3\\0&0&0&1&1/3&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right)$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung oben ist daher bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2e+f+g+h\\e-2f+g+h\\e+f-2g+h\\e+f+g-2h\end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 14.8. (a) Die Matrix A ist genau dann invertierbar wenn $\lambda \neq 0$.

(b) Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\\lambda&3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&3-\lambda/2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&3-\lambda/2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&\lambda-2\end{pmatrix}$$

Also ist B genau dann invertierbar wenn $3-\lambda/2 \neq 0$ und $\lambda-2 \neq 0$ gilt, d.h. $\lambda \neq 6$ und $\lambda \neq 2$.

(c) Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}1&7&8&9\\0&2&5&\lambda\\0&0&3&6\\0&0&\lambda&4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&7&8&9\\0&2&5&\lambda\\0&0&1&2\\0&0&0&4-2\lambda\end{pmatrix}.$$

Also ist C genau dann invertierbar wenn $4-2\lambda \neq 0$ gilt, d.h. genau dann wenn $\lambda \neq 2$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

15. Übungsblatt für die Woche vom 24. bis 28. Juni 2019

Aufgabe 15.1. (a) Beschreibe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}1\\3\\5\\9\end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\2\end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung.

(b) Beschreibe

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\-8\\-9\\-10\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-3\\-3\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}-1\\3\\13\\15\\17\end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch ein lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 15.2. Zeige durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

für beliebige 2×2-Matrizen A und B gilt.

Aufgabe 15.3. (a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, dessen Eckpunkte folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, sodass das Dreieck DBC Flächeninhalt 1 hat.

Beispiele unter http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html

Aufgabe 15.4. Berechne folgende Determinanten, einmal mit der Regel von Sarrus und einmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 15.5. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & +2z & = & 0 \\ 4x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

Aufgabe 15.6. Beschreibe die Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung. Erkläre zwei verschiedene Lösungswege: Verwende beim einen das Kreuzprodukt und gehe beim anderen wie in Aufgabe 15.1 vor.

Aufgabe 15.7. (a) Betrachte die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme eine Gerade h, die g_1 und g_2 orthogonal schneidet.

Aufgabe 15.8 (Normalabstand eines Punktes von einer Ebene). Seien P ein Punkt und ε eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Unter dem Normalabstand von P zu ε verstehen wir den Abstand $d(P, \varepsilon) := \|F - P\|$, wobei F den Fußpunkt des Lots durch P auf ε bezeichnet.

(a) Sei $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = b\}$ eine Ebene in Normalvektordarstellung mit Normalvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch n, b, P ausdrückt und beweise sie.

(b) Sei $\varepsilon = \{Q + sv + tw : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene in Parameterdarstellung mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch Q, v, w, P ausdrückt und beweise sie.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 15.1. (a) Wir fassen die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14 & -7 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

und lesen eine lineare Gleichung für H ab: $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : 7x_2 - 6x_3 + x_4 = 2\}$.

(b) Wir fassen die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -8 & -3 & 13 \\ -9 & -3 & 15 \\ -10 & -3 & 17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 5 \\ -9 & 6 & 6 \\ -10 & 7 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen ein Gleichngssystem für E ab:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{cccccll} -2x_1 & -5x_2 & +x_3 & & & = & -6 \\ -3x_1 & -6x_2 & & +x_4 & & = & -8 \\ -4x_1 & -7x_2 & & & +x_5 & = & -10 \end{array} \right\}$$

Zu Aufgabe 15.2. Bezeichnen wir die Eintragungen der Matrizen mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 15.3. (a) Wir berechnen

$$v = x(B) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und erhalten mit der Flächenformel aus der Vorlesung

$$F(ABC) = \tfrac{1}{2}|\det(v,w)| = \tfrac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|4 \cdot 9 - 6 \cdot 5| = \tfrac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

(b) Wir suchen einen geeigneten Punkt D auf der Geraden durch C und A und machen daher den Ansatz $x(D) = x(C) + \lambda w$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Flächenformel folgt

$$F(DBC) = \tfrac{1}{2}|\det(v, \lambda w)| = \tfrac{1}{2}|\lambda \det(v,w)| = \tfrac{1}{2}|\det(v,w)| \cdot |\lambda| = F(ABC)|\lambda| = 3|\lambda|.$$

Wählen wir $\lambda = 1/3$ erhalten wir $x(D) = x(C) + \frac{1}{3}w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $F(DBC) = 1$.

Zu Aufgabe 15.4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= 1\cdot 2\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 7 - 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= 14 + 4 - 30 - 10 + 28 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 0\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) \\ &\qquad - 0\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 2 \\ &= 0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 8 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)\cdot(-1)\cdot 4 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} &= 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 9 - 1\cdot 2\cdot 1 \\ &= 18 + 4 + 3 - 12 - 9 - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$

Zu Aufgabe 15.5. Für die Cramer'sche Regel berechnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

und erhalten

$$x = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}, \qquad y = \frac{0}{-5} = 0, \qquad z = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}.$$

Das Eliminationsverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&1\\1&-1&2&0\\4&2&3&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&5&-5&1\\0&6&-5&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&1&-1&1/5\\0&0&1&-1/5\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2/5\\0&1&0&0\\0&0&1&-1/5\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2/5\\0&1&0&0\\0&0&1&-1/5\end{array}\right)$$

und wir erhalten erneut $x = 2/5$, $y = 0$, $z = -1/5$.

Zu Aufgabe 15.6. Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren liefert den Normalvektor

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

der Ebene und wir erhalten die Darstellung

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 = -1\}.$$

Alternativ fassen wir die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\2&0\\3&-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

und lesen eine Gleichung der Ebene ab: $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 = -1\}$.

Zu Aufgabe 15.7. Da h normal auf g_1 und g_2 steht muss h Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

haben. Da h die Gerade g_1 schneidet muss h in der Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 13\}$$

liegen. Wir schneiden ε mit g_2 und erhalten den Schnittpunkt

$$S_2 = \begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}.$$

Da h in ε liegt und g_2 schneidet muss h durch S_2 gehen. Wir erhalten

$$h = \left\{ \begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schneiden wir h mit g_1 erhalten wir den Schnittpunkt

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 15.8. (a) Das Lot durch P auf ε kann durch die Parameterdarstellung $\{P + tn : t \in \mathbb{R}\}$ beschrieben werden. Um den Fußpunkt F des Lots zu erhalten schneiden wir das Lot mit der Ebene und erhalten $\langle n, P + tn\rangle = b$. Daher $F = P + tn$ mit $t = \frac{b - \langle n, P\rangle}{\|n\|^2}$. Für den Normalabstand erhalten wir

$$d(P, \varepsilon) = \|F - P\| = \|tn\| = |t|\|n\| = \frac{|\langle n, P\rangle - b|}{\|n\|}.$$

(b) Da $v \times w$ Normalvektor der Ebene ist haben wir

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle v \times w, x\rangle = \langle v \times w, Q\rangle\}.$$

Aus (a) erhalten wir daher

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|\langle v \times w, P - Q\rangle|}{\|v \times w\|} = \frac{|\det(v, w, P - Q)|}{\sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}}.$$

Beachte, dass im Zähler das Volumen des Parallelepipeds mit Ecken $Q, Q + v, Q + w, P, Q + v + w, P + v, P + w, P + v + w$ steht und im Nenner der Flächeninhalt der Seite mit Ecken $Q, Q+v, Q+w, Q+v+w$; der Quotient stimmt daher mit der entsprechenden Höhe überein, d.h. mit dem Normalabstand.