

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

1. Übungsblatt für die Woche vom 4. bis 8. März 2019

AUFGABE 1.1. (a) Wiederhole die Definition eines geordneten Körpers.

- (b) Gib zwei Beispiele geordneter Körper an.
- (c) Erkläre, warum Quadrate in geordneten Körpern stets größer oder gleich 0 sind.
- (d) Erkläre, warum in jedem geordneten Körper $-1 < 0 < 1$ gilt.
- (e) Erkläre, warum auf den komplexen Zahlen \mathbb{C} keine Ordnungsrelation existiert, die \mathbb{C} zu einem geordneten Körper macht.

AUFGABE 1.2. Sei K ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

- (i) P ist abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
- (ii) P ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
- (iii) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.

Zeige, dass K mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

AUFGABE 1.3. Unter einer strengen Totalordnung auf einer Menge X verstehen wir eine transitive Relation $<$ auf X , die folgende Eigenschaft (Trichotomie) besitzt. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ tritt genau einer (und nur einer) der folgenden drei Fälle ein:

entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$.

- (a) Sei \leq eine Totalordnung auf X . Zeige, dass durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y$$

eine strenge Totalordnung auf X definiert ist.

- (b) Sei $<$ eine strenge Totalordnung auf X . Zeige, dass durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

eine Totalordnung \leq auf X definiert ist.

AUFGABE 1.4. Seien K und L zwei Körper. Eine Abbildung $\varphi: K \rightarrow L$ wird Körperhomomorphismus genannt, wenn für alle $x, y \in K$ folgende drei Gleichungen gelten:

- (a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- (b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
- (c) $\varphi(1) \neq 0$

Zeige, dass in diesem Fall für alle $x \in K$ weiters gilt:

- (d) $\varphi(0) = 0$
- (e) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
- (f) $\varphi(1) = 1$
- (g) Ist $x \neq 0$, dann auch $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

AUFGABE 1.5. Sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. Zeige der Reihe nach:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$. Hinweis: Induktion nach n
- (b) $\forall m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = m$
- (c) $\forall q \in \mathbb{Q} : \varphi(q) = q$
- (d) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Hinweis: $x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
- (e) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$
- (f) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = x$. Hinweis: Wären $\varphi(x)$ und x verschieden, läge eine rationale Zahl zwischen ihnen.

Die identische Abbildung ist daher der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

AUFGABE 1.6. Gib einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ an, d.h. einen Körperhomomorphismus, der verschieden von der identischen Abbildung ist.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

2. Übungsblatt für die Woche vom 11. bis 15. März 2019

AUFGABE 2.1. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige mathematische Beispiele.

AUFGABE 2.2. Sei H eine nicht leere Menge und $+: H \times H \rightarrow H$ eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften. Für alle $a, b, c \in H$ gelte:

- (i) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
- (ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
- (iii) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Ein neutrales Element oder additive Inverse (Gruppenaxiome) werden nicht vorausgesetzt.

- (a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Quotientenmenge mit $G := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
- (b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf G eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
- (c) Zeige, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

AUFGABE 2.3. In der Situation von Aufgabe 2.2 sei $c \in H$ fix. Betrachte die Abbildung

$$\iota: H \rightarrow G, \quad \iota(a) := [a + c, c].$$

- (a) Zeige, dass ι nicht von der Wahl von c abhängt.
- (b) Zeige, dass ι ein Homomorphismus ist, d.h. $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für $a, b \in H$.
- (c) Zeige, dass ι injektiv ist. Wir können daher H mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$ identifizieren.
- (d) Zeige, dass jedes $g \in G$ von der Form $g = \iota(a) - \iota(b)$ ist, für geeignete $a, b \in H$.
- (e) Zeige, dass ι bijektiv ist, wenn wir mit einer Gruppe H beginnen. In diesem Fall liefert die Konstruktion also nichts Neues.

AUFGABE 2.4. In der Situation von Aufgabe 2.2 setzen wir weiters voraus:

- (iv) Sind $a, b \in H$, dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: Entweder existiert $x \in H$ mit $a + x = b$; oder $a = b$; oder es existiert $x \in H$ mit $a = b + x$.

Zeige, dass in dieser Situation folgendes gilt:

Beispiele unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html>

- (a) $\iota(a) \neq 0$, für alle $a \in H$.
- (b) $\iota(a) \neq -\iota(b)$ für alle $a, b \in H$.
- (c) Zu jedem $g \in G \setminus \{0\}$ existiert $a \in H$ mit $g = \iota(a)$ oder $g = -\iota(a)$.

Identifizieren wir H via ι mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$, dann gilt also

$$G \setminus \{0\} = (-H) \cup H \quad \text{und} \quad (-H) \cap H = \emptyset,$$

wobei $-H = \{-a : a \in H\}$.

AUFGABE 2.5. In der Situation von Aufgabe 2.2 nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c, \quad \text{und} \quad a(b + c) = ab + ac.$$

- (a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf G eine Operation wohldefiniert ist.
- (b) Zeige, dass $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 2.6. In der Situation von Aufgabe 2.5 zeige weiters:

- (a) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
- (b) Zeige $\iota(ac) = \iota(a)\iota(c)$ für $a, c \in H$.
- (c) Zeige, dass der Ring G ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

AUFGABE 2.7. Wenden wir obige Konstruktion auf $H = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ an, erhalten wir $G = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition, vgl. Einführung in die Mathematik. Wir wollen hier eine direktere (aber weniger elegante) Konstruktion von \mathbb{Z} skizzieren. Dazu fixieren wir $o \notin \mathbb{N}$ und zu jedem $a \in \mathbb{N}$ ein $a' \notin \{o\} \cup \mathbb{N}$ so, dass $a' \neq b'$ für alle $a \neq b$ gilt. Wir betrachten nun

$$Z := \{a' : a \in \mathbb{N}\} \cup \{o\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, 3', 2', 1', o, 1, 2, 3, \dots\}$$

und dehnen die Addition von \mathbb{N} zu einer Verknüpfung $+$: $Z \times Z \rightarrow Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $g + o := g$ und $o + g := g$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$a' + b' := (a + b)'$$

$$a' + b := \begin{cases} x & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x' & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$a + b' := \begin{cases} x' & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass $(Z, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Da der Beweis des Assoziativgesetzes eine unangenehme Fallunterscheidung erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$a' + (b + c) = (a' + b) + c,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

AUFGABE 2.8. In der Situation von Aufgabe 2.7 dehnen wir nun auch die Multiplikation von \mathbb{N} zu einer Verknüpfung $\cdot: Z \times Z \rightarrow Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $og := o$ und $go := o$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a'b := (ab)', \quad ab' := (ab)' \quad \text{und} \quad a'b' := (ab)'.$$

Zeige, dass $(Z, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Da der Beweis der Assoziativ- und Distributivgesetze umfangreiche Fallunterscheidungen erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$(a'b)c = a'(bc) \quad \text{und} \quad (a' + b)c = a'c + bc,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

3. Übungsblatt für die Woche vom 18. bis 22. März 2019

AUFGABE 3.1. Leite aus den Inzidenzaxiomen I1 bis I3 folgende Eigenschaften ab:

- (a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
- (b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
- (c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
- (d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

AUFGABE 3.2. Zeige, dass das Innere einer Strecke stets unendlich viele Punkte enthält.

AUFGABE 3.3. Zeige, dass durch jeden Punkt unendlich viele Geraden laufen.

AUFGABE 3.4. (a) Zeige, dass das Innere einer Strecke konvex ist.

- (b) Zeige, dass offene Halbgeraden konvex sind.
- (c) Zeige, dass offene Halbebenen konvex sind.

AUFGABE 3.5. (a) Zeige, dass $[AB]$ konvex ist, für je zwei Punkte A und B .

- (b) Zeige, dass abgeschlossene Halbgeraden konvex sind.
- (c) Schlage eine Definition abgeschlossener Halbebenen analog zur Definition abgeschlossener Halbstrahlen vor und zeige, dass abgeschlossene Halbebenen konvex sind.

AUFGABE 3.6. (a) Zeige, dass Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind.

- (b) Zeige, dass das Innere eines Winkels konvex ist.
- (c) Zeige, dass das Innere eines Dreiecks konvex ist.
- (d) Schlage eine Definition abgeschlossener Dreiecke vor (Inneres und "Rand") und zeige, dass abgeschlossene Dreiecke konvex sind.

AUFGABE 3.7. Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ vier Punkte, sodass $(AB) = (CD)$. Zeige, dass in dieser Situation schon $\{A, B\} = \{C, D\}$ gelten muss, d.h. entweder $A = C$ und $B = D$ oder $A = D$ und $B = C$. Hinweis: Zeige, dass keiner der drei Fälle $A * C * B$, $A * B * C$, $C * A * B$ eintreten kann und schließe daraus $C = A$ oder $C = B$.

AUFGABE 3.8. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken (BC') und $(B'C)$ im Inneren des Winkels $\angle CAB$ treffen. Hinweis: Wende, wie in der Vorlesung, Axiom A4 an.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

4. Übungsblatt für die Woche vom 25. bis 29. März 2019

AUFGABE 4.1. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken $[BC]$ und $[B'C']$ nicht schneiden. Hinweis: Verwende Axiom A4 oder Proposition 1.2.9.

AUFGABE 4.2. Seien AB und CD zwei Strecken. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (a) Es existiert $X \in (CD)$ mit $AB \equiv CX$.
- (b) Es gilt $|AB| < |CD|$, d.h. es existiert $c \in \mathcal{P}$ mit $|AB| + c = |CD|$.

Dabei bezeichnet \mathcal{P} , wie in der Vorlesung, die Menge der Kongruenzklassen von Strecken (positive Streckenlängen).

AUFGABE 4.3. Sei X ein Punkt im Inneren eines Winkels $\angle AOB$. Zeige, dass dann der gesamte Halbstrahl $\langle OX \rangle$ im Inneren dieses Winkels liegt.

AUFGABE 4.4. Seien h, k, l, r vier, vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (a) h und l bilden einen Winkel und k liegt im Inneren von $\angle(h, l)$.
- (b) h und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.

Zeige, dass dann auch folgende beiden Aussagen zutreffen:

- (c) k und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(k, r)$.
- (d) k liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.

Hinweis: Zeige, dass eine Gerade existiert, die alle vier Halbstrahlen schneidet und wende Lemma 1.2.26 auf die Schnittpunkte an.

AUFGABE 4.5 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.

- (a) Zeige, dass $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ und $\angle CDA$ Winkel bilden.
- (b) Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel. Zeige, dass V konvex ist.
- (c) Zeige, dass die Diagonalen (AC) und (BD) in V liegen.

AUFGABE 4.6 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ Winkel bilden. Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel.

- (a) Skizziere eine Situation, in der $(AC) \cap (BD) = \emptyset$ und $V = \emptyset$ gilt.
- (b) Sei nun $V \neq \emptyset$. Zeige, dass sich (AC) und (BD) in genau einem Punkt treffen.

AUFGABE 4.7. Bezeichne \mathcal{K} , wie in der Vorlesung, die abelsche Gruppe, die wir aus den Kongruenzklassen von Strecken durch Hinzunehmen der additiven Inversen gewonnen haben. Zeige:

- (a) Für $a, b \in \mathcal{K}$ gilt: $2a = 2b \Rightarrow a = b$.
- (b) Für $a, b \in \mathcal{K}$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $na = nb \Rightarrow a = b$.

Dabei verwenden wir die Abkürzungen $2a := a + a$ und $na := a + \dots + a$, wobei die zweite Summe aus n Summanden besteht. Hinweis: An dieser Stelle ist noch unklar, ob in \mathcal{K} durch 2 oder n dividiert werden kann. Verwende stattdessen die Ordnungsrelation.

AUFGABE 4.8. Sei A eine abelsche Gruppe. Für $a \in A$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichne $na := a + \dots + a$ und $(-n)a := -(a + \dots + a)$, wobei beide Summen aus genau n Summanden bestehen. Insbesondere ist $1a = a$ und $(-1)a = -a$. Weiters sei $0a := 0$. Damit ist na für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in A$ definiert.

- (a) Zeige, dass die Gleichung $n(a + b) = na + nb$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A$ gilt.
- (b) Zeige, dass die Gleichung $(n + m)a = na + ma$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ gilt.
- (c) Gib eine abelsche Gruppe A und $a, b \in A$ an, für die $a \neq b$ aber $2a = 2b$ gilt.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

5. Übungsblatt für die Woche vom 1. bis 5. April 2019

AUFGABE 5.1. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AB \equiv AC$. Weiters seien $B' \in (BC)$ und $C' \in (B'C)$ so, dass $BB' \equiv CC'$. Zeige, dass $AB'C'$ ein gleichschenkeliges Dreieck bildet.

AUFGABE 5.2. Seien AB und $A'B'$ zwei Strecken, die nicht in einer Geraden liegen und denselben Mittelpunkt M besitzen. Es gilt daher $MA \equiv MB$ und $MA' \equiv MB'$.

- (a) Zeige $AA' \equiv BB'$.
- (b) Sei weiters $A'' \in (AA')$ und bezeichne B'' den Schnittpunkt von $g(A'', M)$ mit (BB') . Zeige $MA'' \equiv MB''$.

AUFGABE 5.3. Seien A, B, A', B' vier Punkte, sodass je drei ein Dreieck bilden. Weiters sei das Dreieck $AA'B$ kongruent zum Dreieck $BB'A$. Zeige, dass dann auch die Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ kongruent sind.

AUFGABE 5.4. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

AUFGABE 5.5. Sei ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Hinweis: O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt daher $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Verwende den Satz vom Außenwinkel und die Tatsache, dass im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, und umgekehrt.

Bisher haben wir $|AB|$ nur für Strecken AB definiert, im degenerierten Fall setzen wir nun $|AA| := 0$. Es gilt daher $A = B \Leftrightarrow |AB| = 0$.

- AUFGABE 5.6. Seien A, B, C drei beliebige Punkte, $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$.
- (a) Zeige, $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ und $c \leq a + b$. Hinweis: Aufgrund der Dreiecksungleichung der Vorlesung können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden.

- (b) Für $X \in (AB)$ zeige $|CX| \leq \max\{a, b\}$. Hinweis: Nach Aufgabe 5.5 können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden. Erkläre, warum einer der Fälle $C * X * B$, $C = X$ oder $A * X * C$ eintreten muss und diskutiere diese Fälle einzeln.

AUFGABE 5.7. Sei M ein Punkt und $r > 0 \in \mathcal{P}$. Betrachte die Mengen (Kreisscheiben)

$$K := \{X \in \mathcal{E} : |MX| < r\} \quad \text{und} \quad \bar{K} := \{X \in \mathcal{E} : |MX| \leq r\}.$$

Zeige, dass K und \bar{K} konvex sind. Hinweis: Verwende Aufgabe 5.6(b).

AUFGABE 5.8. Sei OAB ein gleichschenkeliges Dreieck mit $OA \equiv OB$. Seien A' und B' zwei weitere Punkte auf den Schenkeln, sodass $O * A' * A$ und $O * B' * B$ und $A'A \equiv B'B$ gilt. Bezeichne X den Schnittpunkt von (AB') und $(A'B)$, vgl. Aufgabe 3.8. Weiters sei M der Schnittpunkt von $g(O, X)$ mit (AB) . Fertige eine Skizze an und zeige der Reihe nach:

- (a) Die Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ sind kongruent.
- (b) Die Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ sind kongruent.
- (c) Die Dreiecke OAX und OBX sind kongruent.
- (d) Die Dreiecke OMA und OMB sind kongruent.

Schließe daraus, dass (OX) die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle AOB$ ist und M mit dem Mittelpunkt der Strecke AB übereinstimmt.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

6. Übungsblatt für die Woche vom 8. bis 12. April 2019

AUFGABE 6.1. Sei AB ein Strecke. Wähle auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ zwei Punkte C und D so, dass $\angle CAB \equiv \angle DBA$ und $AC \equiv BD$. Bezeichne den Schnittpunkt von $g(A, B)$ und $g(C, D)$ mit M . Fertige eine Skizze an und zeige, dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Gehe anschließend näher auf folgende Punkte ein:

- Warum können Punkte C und D so gewählt werden?
- Warum haben $g(A, B)$ und $g(C, D)$ genau einen Schnittpunkt?
- Warum kann M nicht mit A oder B zusammenfallen? (Satz vom Außenwinkel)
- Warum liegt M im Inneren der Strecke AB ?

AUFGABE 6.2 (Streckensymmetrale). Sei AB eine Strecke mit Mittelpunkt M und bezeichne g das Lot auf $g(A, B)$ durch M . Zeige

$$g = \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

In den nächsten Beispielen verwenden wir folgende Definition: Vier Punkte $ABCD$ werden als konvexes Viereck bezeichnet, wenn sich die Diagonalen (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden, vgl. Aufgaben 4.5 und 4.6.

AUFGABE 6.3. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zeige, dass sich die Diagonalen AC und BD in ihren Mittelpunkten schneiden. Insbesondere sind Parallelogramme konvexe Vierecke.

AUFGABE 6.4. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in ihren Mittelpunkten schneiden. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \parallel g(C, D)$ und $|AB| = |CD|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.6. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |DA|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.7.

- Skizziere ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $g(A, B) \parallel g(C, D)$ und $|BC| = |DA|$, das kein Parallelogramm ist.

- (b) Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \parallel g(C, D)$, $|BC| = |DA|$ und $|AC| \leq |BC|$.
Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

AUFGABE 6.8 (Winkelsumme konvexer Vierecke). Zeige, dass für die Winkelsumme eines konvexen Vierecks $ABCD$ stets

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R$$

gilt. Skizziere ein (nicht konvexes) Viereck, für das diese Gleichung nicht erfüllt ist.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

7. Übungsblatt für die Woche vom 29. April bis 3. Mai 2019

AUFGABE 7.1 (S:S:S Ähnlichkeitssatz). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $a' := |B'C'|$, $b' := |C'A'|$, $c' := |A'B'|$, sodass

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

Zeige, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind, d.h. es gilt auch

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma'.$$

Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S Ähnlichkeitssatzes in der Vorlesung, lässt sich dies mit dem W:W:W Ähnlichkeitssatz auf den SSS Kongruenzsatz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

AUFGABE 7.2. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, sodass C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen. Zeige, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Hinweis: Gehe analog zur Vorlesung vor (Satz 1.5.32).

AUFGABE 7.3 (Sehnensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Wie lässt sich daraus der Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke folgern?

AUFGABE 7.4 (Sekanten-Tangentensatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem äußeren Punkt S des Kreises trifft. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ annehmen dürfen und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um die Dreiecke AST und TSB zu vergleichen. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

AUFGABE 7.5 (Sekantensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem äußeren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen können. Verwende dann den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Gib auch einen zweiten Beweis mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

AUFGABE 7.6 (Sehnenviereck). Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

Hinweis: Die eine Implikation folgt sofort aus dem Sehnenatz. Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die andere Implikation zu zeigen.

AUFGABE 7.7. Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\}$$

Vereinigung zweier orthogonaler Geraden ist. Hinweis: Verwende die Beschreibung der Winkelsymmetrale aus der Vorlesung.

AUFGABE 7.8. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es genau vier Kreise gibt, die jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

8. Übungsblatt für die Woche vom 6. bis 10. Mai 2019

AUFGABE 8.1 (Euklids Tangentenkonstruktion). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt im Äußeren von Γ .

- Erkläre, warum die Strecke MA den Kreis Γ in einem Punkt B schneidet.
- Sei t die Tangente an Γ im Punkt B und bezeichne Γ' den Kreis mit Mittelpunkt M durch A . Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
- Erkläre, warum MC den Kreis Γ in einem Punkt D schneidet.
- Zeige, dass die Gerade durch A und D tangential an Γ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an Γ durch A ?

AUFGABE 8.2 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei AB Durchmesser eines Kreises Γ . Weiters sei C ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

- Liegt C im Inneren von Γ , dann ist $\angle ACB$ stumpf.
- Liegt C auf Γ , dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
- Liegt C im Äußeren von Γ , dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne D den Schnittpunkt von Γ mit dem Radius durch C . Verwende den Satz vom Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle ADB$ zu vergleichen.

AUFGABE 8.3 (Neunpunktkreis auch Feuerbachkreis). Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Bezeichnen M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der drei Seiten, H_a, H_b, H_c die drei Höhenfußpunkte und N_a, N_b, N_c die Mittelpunkte der Höhenabschnitte HA, HB, HC . Zeige, dass die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, N_c$ auf einem Kreis liegen. Zeige dazu der Reihe nach:

- Die Trägergeraden der drei Strecken AB, M_aM_b und N_aN_b sind parallel.
- Die Trägergeraden der drei Strecken CH_c, M_aN_b und M_bN_a sind parallel.
- $M_aM_bN_aN_b$ bildet ein Rechteck, d.h. ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.
- $M_aM_cN_aN_c$ bildet ein Rechteck.
- Die sechs Punkte $M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c$ liegen auf dem Kreis mit Durchmesser M_aN_a .
- H_a liegt auch auf diesem Kreis.
- H_b und H_c liegen ebenfalls auf diesem Kreis.

Beispiele unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html>

AUFGABE 8.4 (Nachtrag zum Neunpunktkreis). Die Rechtecke im Beweis der vorangehenden Aufgabe können zu Strecken degenerieren.

- (a) Gib ein Dreieck an, für das $C = H = H_a = H_b = N_c$, $M_a = N_b$ und $M_b = N_a$ gilt.
- (b) Zeige, dass aber stets $M_a \neq M_b$, $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$ gilt.
- (c) Vervollständige den Beweis in der vorigen Aufgabe im Fall degenerierter Rechtecke.
- (d) Gib ein Dreieck an, für das $H_a = M_a$ gilt.
- (e) Erkläre, warum stets $H_a \neq M_b$ gilt.
- (f) Kann H_a mit N_a zusammenfallen?

AUFGABE 8.5 (Winkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Seite BC . Zeige:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \iff \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Sei E der Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch C . Zeige

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \quad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

und verwende eine Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung.

AUFGABE 8.6 (Außenwinkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und seien D, F zwei Punkte mit $B * C * D$ und $B * A * F$. Zeige:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC \iff \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Dies lässt sich analog zum Winkelhalbierendensatz beweisen.

AUFGABE 8.7 (Kreis des Apollonius). Seien A und B zwei verschiedene Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\}$$

einen Kreis bildet und drücke seinen Radius durch λ und $\delta := |AB|$ aus.

Nimm zunächst $\lambda > 1$ an und gehe wie folgt vor:

- (a) Erkläre, warum auf der Strecke AB genau ein Punkt C mit $|CA| = \lambda|CB|$ existiert und drücke $|CB|$ durch λ und δ aus.
- (b) Erkläre, warum auf dem Strahl $A(B>$ genau ein Punkt D mit $|DA| = \lambda|DB|$ existiert und drücke $|DB|$ durch λ und δ aus.
- (c) Erkläre, warum auf $g(A, B)$ keine weiteren Punkte X mit $|XA| = \lambda|XB|$ existieren.
- (d) Drücke den Radius des Kreises Γ mit Durchmesser CD durch λ und δ aus.
- (e) Sei X ein Punkt mit $|XA| = \lambda|XB|$, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige der Reihe nach: Der Strahl $(XC>$ halbiert den Winkel $\sphericalangle AXB$; der Strahl $(XD>$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BXF$, wobei $A * X * F$; der Winkel $\sphericalangle CXD$ ist ein rechter; und $X \in \Gamma$. Schließe daraus:

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \subseteq \Gamma.$$

- (f) Zeige $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$, wobei Γ' den analogen Kreis für einen weiteren Parameter λ' mit $1 < \lambda' \neq \lambda$ bezeichnet.
- (g) Verwende (f), um die umgekehrte Inklusion $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \supseteq \Gamma$ zu zeigen.

Welche Mengen erhalten wir in den Fällen $\lambda = 1$ und $0 < \lambda < 1$.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

9. Übungsblatt für die Woche vom 13. bis 17. Mai 2019

- AUFGABE 9.1. (a) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.
(b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Zeige

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1.$$

AUFGABE 9.2 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

AUFGABE 9.3. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und sei O ein weiterer Punkt auf dieser Geraden, der verschieden von A, B und C ist. Zeige

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CO}{OA} = -1.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Absolutbeträge beider Seiten übereinstimmen und führe anschließend eine geeignete Fallunterscheidung durch, um auch das Vorzeichen zu überprüfen.

AUFGABE 9.4. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \parallel g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

AUFGABE 9.5 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B) \parallel g(A', B')$ und $g(B, C) \parallel g(B', C')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A)$ und $g(C', A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

AUFGABE 9.6 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B') \parallel g(B, A')$ und $g(B, C') \parallel g(C, B')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A')$ und $g(A, C')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 9.3.

Beispiele unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html>

AUFGABE 9.7 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a , H_b und H_c . Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

AUFGABE 9.8 (Inkreismittelpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Verwende den Winkelhalbierendensatz, siehe Aufgabe 8.5.

AUFGABE 9.9 (Odoms Konstruktion des goldenen Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A * B * C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende den Sehnensatz aus Aufgabe 7.3.

AUFGABE 9.10 (Goldenes Dreieck). Teile X die Strecke AB im goldenen Schnitt, d.h. X liege im Inneren von AB und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Sei C ein weiterer Punkt mit $|AB| = |AC|$ und $|BC| = |AX|$. Zeige, dass die Dreiecke ABC und CBX ähnlich sind und schließe daraus

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$$

sowie $5\sphericalangle CAB = 2R$ und $5\sphericalangle ABC = 4R$.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

10. Übungsblatt für die Woche vom 20. bis 24. Mai 2019

AUFGABE 10.1. Zeige, dass zwei nicht-degenerierte lineare Gleichungen genau dann dieselbe Gerade in \mathbb{R}^2 beschreiben, wenn die eine ein Vielfaches der anderen ist. Seien dazu $a_1, a_2, b, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0) \neq (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b} \right\}$$

genau dann gilt, wenn $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

AUFGABE 10.2. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in \mathcal{E} mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- Zeige, dass C auf $g := g(A, B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
- Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g , für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
- Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g , für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
- Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

AUFGABE 10.3 (Koordinaten des Streckenmittelpunkts). Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien $A \neq B$ zwei Punkte in \mathcal{E} und bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke AB . Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Mittelpunkts $x(M)$ aus den Koordinaten der Endpunkte $x(A)$ und $x(B)$ berechnet werden können und beweise diese Formel.

AUFGABE 10.4. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A, B)$ und $h := g(C, D)$ auf drei verschiedene Arten:

- Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
- Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
- Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die durch Einsetzen entsteht.

AUFGABE 10.5 (Schwerpunkt in Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu ein beliebiges affines Koordinatensystem, beschreibe die drei Schwerlinien in Koordinaten durch Parameterdarstellungen, zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden und gib eine Formel für die Koordinaten des Schwerpunkts an. Schließe daraus auch $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = \frac{1}{3}$, wobei M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen.

AUFGABE 10.6 (Satz von Menelaos mittels Koordinaten). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

AUFGABE 10.7 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C' . Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

AUFGABE 10.8 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D' . Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Der Quotient von Teilverhältnissen $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird als Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D bezeichnet. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die entsprechende Koordinatenabbildung bezeichnet. Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

11. Übungsblatt für die Woche vom 27. bis 31. Mai 2019

AUFGABE 11.1. Für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- (a) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$
- (b) $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$
- (c) $\langle v + w, v - w \rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$

In der Vorlesung wurde (a) gezeigt. Beweise nun (b) und (c). Leite daraus auch folgende beiden Beziehungen her:

- (d) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)
- (e) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ (Polarisierungsidentität)

AUFGABE 11.2. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, g eine Gerade mit Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X \rangle = b\}$ und P ein weiterer Punkt in \mathcal{E} . Leite folgende Formel für den Normalabstand her:

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, x(P) \rangle - b|}{\|n\|}.$$

Betrachte nun Punkte A, B, C, D, E mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x(E) = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

und bezeichne g die Gerade durch A und B .

- (a) Welcher der Punkte C, D, E hat kleinsten Normalabstand von g ?
- (b) Gib auf jeder Seite von g einen Punkt mit Normalabstand 7 an.

AUFGABE 11.3 (Polare und Tangenten). Sei

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - M, X - M \rangle = r^2\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer, von M verschiedener Punkt, dann wird die Gerade

$$p = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle A - M, X - M \rangle = r^2\}$$

die Polare von A bezüglich Γ genannt. Zeige:

- (a) Liegt A auf Γ dann ist p die Tangente bei A .
- (b) Liegt A im Äußeren von Γ dann schneidet p den Kreis in zwei Punkten und dies sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten durch A an Γ .
- (c) Liegt A im Inneren von Γ dann haben p und Γ leeren Schnitt.

AUFGABE 11.4. Betrachte einen Kreis Γ und zwei Punkte A, B in \mathbb{R}^2 , wobei

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25 \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass A auf Γ liegt und gib eine Gleichung der Tangente bei A an Γ an.
- (b) Zeige, dass B im Äußeren von Γ liegt und bestimme Gleichungen der beiden Tangenten durch B an Γ . Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

AUFGABE 11.5 (Streckensymmetrale mittels kartesischer Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte in \mathcal{E} . Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$s = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = |PB|\}$$

eine Gerade bildet, die orthogonal auf die Gerade $g(A, B)$ steht.

AUFGABE 11.6 (Umkreismittelpunkt mittels kartesischer Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

AUFGABE 11.7 (Kreis des Apollonius mit kartesischen Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut (vgl. Aufgabe 8.7) zu zeigen, dass die Menge

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = \lambda|PB|\}$$

einen Kreis bildet. Drücke seinen Radius durch λ und $|AB|$ aus. Zeige auch, dass sein Mittelpunkt M auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und drücke das Teilverhältnis $\frac{AM}{MB}$ durch λ aus. Hinweis: Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Koordinatenachse liegt. Zeige, dass die definierende Gleichung von Γ zu einer Kreisgleichung äquivalent ist.

AUFGABE 11.8 (Potenzgerade in kartesischen Koordinaten). Betrachte zwei Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$p = \{P \in \mathcal{E} : |PM|^2 - r^2 = |PM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade bildet, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Leite auch eine Formel für $d(M, p)$ her, die diesen Normalabstand durch r, r' und $d := |MM'|$ ausdrückt. Hinweis: Zeige, dass die definierende Gleichung von p äquivalent zu einer linearen Gleichung ist.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

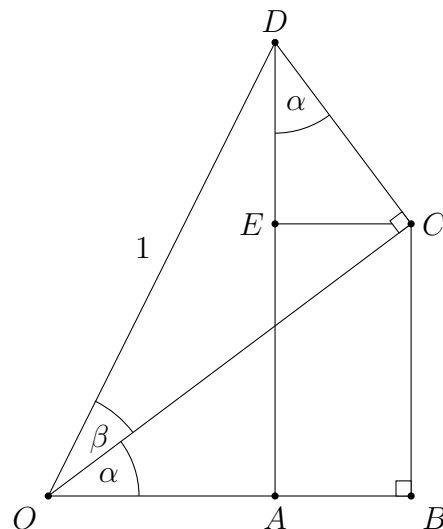
12. Übungsblatt für die Woche vom 3. bis 7. Juni 2019

AUFGABE 12.1. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ alle zwischen 0° und 90° liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

AUFGABE 12.2.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige

$$\cos((n+1)\alpha) = 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha).$$

Hinweis: Wende das Additionstheorem auf $\cos((n+1)\alpha)$ und $\cos((n-1)\alpha)$ an.

Beispiele unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html>

(b) Verwende (a), um folgende Formeln zu überprüfen:

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\cos(4\alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\cos(5\alpha) = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$

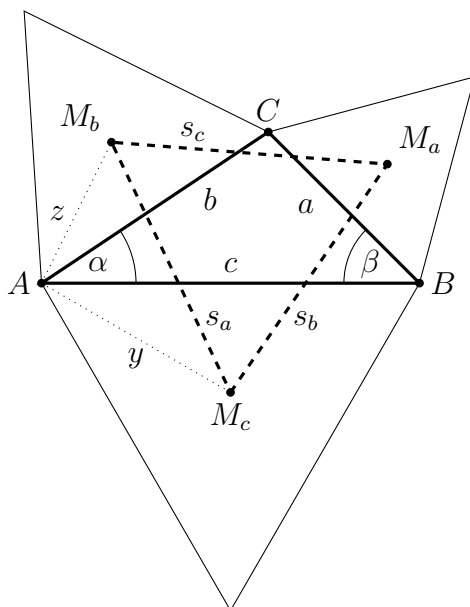
(c) Zeige mit Hilfe der letzten Formel in (b), dass

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hinweis: $\cos(5 \cdot 18^\circ) = 0$.

AUFGABE 12.3. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SSS, SWS, WSW, SWW, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

AUFGABE 12.4 (Satz von Napoleon). Werden über jeder Seite eines Dreiecks ABC außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden ihre Mittelpunkte selbst ein gleichseitiges Dreieck. Beweise diesen Satz trigonometrisch wie folgt:



(a) Zeige $b/2 = z \cos 30^\circ$, $c/2 = y \cos 30^\circ$ und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(30^\circ + \alpha + 30^\circ).$$

(b) SchlieÙe daraus $y = c/\sqrt{3}$, $z = b/\sqrt{3}$ und

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha.$$

(c) Erkläre, wie daraus folgt:

$$3s_a^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin \alpha}{a}.$$

(d) Erkläre, warum auch folgende Relationen gelten:

$$3s_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin \beta}{b}$$
$$3s_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin \gamma}{c}.$$

(e) Wie folgt daraus $s_a = s_b = s_c$?

AUFGABE 12.5.

(a) Seien A, B, C drei 2×2 -Matrizen. Zeige $(A + B)C = AC + BC$ und $A(BC) = (AB)C$ ohne die Sumschreibweise zu verwenden.

(b) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne $(A + B)C$, $AC + BC$, $(AB)C$ und $A(BC)$ direkt, d.h. ohne Zuhilfenahme der Rechenregel in (a).

(c) Berechne A^{-1} und gib eine 2×2 -Matrix an, für die $AX = B$ gilt.

AUFGABE 12.6. Betrachte die affinen Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 + 3 \\ 2x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 7x_2 + 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib die Komposition $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(b) Gib die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(c) Berechne $\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 12.7. (a) Bestimme eine affine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich eines affinen Koordinatensystems haben die Punkte P, Q, R, S Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(S) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich eines weiteren affinen Koordinatensystems haben P, Q, R Koordinaten

$$x'(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x'(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x'(R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten $x'(S)$. Hinweis: Es existiert eine affine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$ für alle Punkte Z gilt.

AUFGABE 12.8.

- (a) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 3 \right\}$ in der Form $\sigma(x) = Ax + b$ an.
- (b) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 2 \right\}$ in der Form $\sigma'(x) = A'x + b'$ an.
- (c) Zeige, dass die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ eine Rotation ist und bestimme ihr Zentrum sowie ihren Drehwinkel.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
 Sommersemester 2019 (UE250163)

13. Übungsblatt für die Woche vom 10. bis 14. Juni 2019

AUFGABE 13.1. Berechne alle Matrizenprodukte der Form XY , sofern sie definiert sind, wobei X und Y zwei der folgenden Matrizen bezeichnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = (4 \ 3 \ 2 \ 1).$$

D.h. berechne alle Produkte der Form $A^2, AB, AC, \dots, BA, B^2, BC, \dots, FD, FE, F^2$, sofern diese definiert sind.

AUFGABE 13.2. Bestimme die Ränge folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

AUFGABE 13.3. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig, welche bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n , und welche bilden eine Basis? Gib in jedem Fall die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Teilraums an sowie eine Basis, die aus einigen der angegebenen Vektoren besteht.

(a) $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) $n = 5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

(e) $n = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 13.4. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^4 bilden und gib vier dieser Vektoren v_i an, die eine Basis von \mathbb{R}^4 bilden. Gib auch vier dieser Vektoren an, die keine Basis von \mathbb{R}^4 bilden.

AUFGABE 13.5. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 - 9x_3 - 20x_4 &= 0 \\ -4x_1 - x_2 - 6x_3 - 20x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 8x_5 &= 0 \\ -7x_1 + 9x_2 + 13x_3 - 5x_4 + 20x_5 &= 0 \end{aligned}$$

AUFGABE 13.6. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +5x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & +10x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & +9x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -3x_5 & +8x_6 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccc} -2x_1 & -14x_2 & +12x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -9x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +24x_2 & -21x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & -19x_2 & +16x_3 & = & 0 \end{array}$$

AUFGABE 13.7. (a) Welche Dimension muss der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems mit 13 Gleichungen in 29 Unbekannten mindestens haben?

(b) Wieviele lineare Gleichungen sind jedenfalls notwendig um einen 17-dimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^{23} zu beschreiben?

AUFGABE 13.8. Gib für jedes $k = 3, 4, 5, 6$ ein System von 3 homogenen linearen Gleichungen in sechs Variablen an, dessen Lösungsraum k -dimensional ist. Warum ist dies für $k \leq 2$ und $k \geq 7$ nicht möglich?

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

14. Übungsblatt für die Woche vom 17. bis 21. Juni 2019

AUFGABE 14.1. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{rcl} -x & -2y & +5z = -2 \\ 2x & +6y & -16z = 2 \\ 3x & +9y & -23z = 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & 8x_4 = 16 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -3x_4 = -9 \\ -3x_1 & -6x_2 & -7x_3 & -2x_4 = -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 = -5 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -2x_4 = -5 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +15x_4 = 34 \end{array}$$

AUFGABE 14.2. (a) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 = -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 = -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 = 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 = 35 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

(b) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +6x_5 & & 7x_7 & +8x_8 = 10 \\ & & & x_4 & +4x_5 & & +9x_7 & = 11 \\ & & & & & x_6 & & +5x_8 = 12 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung.

AUFGABE 14.3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 14.4. Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse A^{-1} sowie eine Matrix X , für die $XA = B$ gilt.

AUFGABE 14.5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 -Matrix mit $D := ad - bc \neq 0$. Verwende das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen und bestätige damit erneut die bekannte Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 14.6. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ x + y - z - w \\ x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix},$$

bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

AUFGABE 14.7. Zeige, dass eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch ihre Eckensummen

$$e := b + c + d$$

$$f := a + c + d$$

$$g := a + b + d$$

$$h := a + b + c$$

eindeutig bestimmt ist und drücke die Eintragungen von A durch e, f, g, h aus. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen e, f, g, h stets eine Matrix A mit diesen Eckensummen?

AUFGABE 14.8. Für welche Werte von λ sind folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende Zeilenumformungen, um die Matrizen auf Zeilenstufenform zu bringen.

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

15. Übungsblatt für die Woche vom 24. bis 28. Juni 2019

AUFGABE 15.1. (a) Beschreibe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung.

(b) Beschreibe

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch ein lineares Gleichungssystem.

AUFGABE 15.2. Zeige durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

für beliebige 2×2 -Matrizen A und B gilt.

AUFGABE 15.3. (a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC , dessen Eckpunkte folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, sodass das Dreieck DBC Flächeninhalt 1 hat.

AUFGABE 15.4. Berechne folgende Determinanten, einmal mit der Regel von Sarrus und einmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

AUFGABE 15.5. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 4x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

AUFGABE 15.6. Beschreibe die Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung. Erkläre zwei verschiedene Lösungswege: Verwende beim einen das Kreuzprodukt und gehe beim anderen wie in Aufgabe 15.1 vor.

AUFGABE 15.7. (a) Betrachte die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme eine Gerade h , die g_1 und g_2 orthogonal schneidet.

AUFGABE 15.8 (Normalabstand eines Punktes von einer Ebene). Seien P ein Punkt und ε eine Ebene in \mathbb{R}^3 . Unter dem Normalabstand von P zu ε verstehen wir den Abstand $d(P, \varepsilon) := \|F - P\|$, wobei F den Fußpunkt des Lots durch P auf ε bezeichnet.

- (a) Sei $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = b\}$ eine Ebene in Normalvektordarstellung mit Normalvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch n, b, P ausdrückt und beweise sie.
- (b) Sei $\varepsilon = \{Q + sv + tw : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene in Parameterdarstellung mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch Q, v, w, P ausdrückt und beweise sie.