Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 1

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 1.1. (a) Wiederhole die Definition eines geordneten Körpers.
(b) Gib drei Beispiele geordneter Körper an.
(c) Erkläre, warum Quadrate in geordneten Körpern stets größer oder gleich 0 sind.
(d) Erkläre, warum in jedem geordneten Körper $-1 < 0 < 1$ gilt.
(e) Erkläre, warum auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper macht.

Aufgabe 1.2. Sei K ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
(i) P is abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
(ii) P ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
(iii) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.

Zeige, dass K mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

Aufgabe 1.3. Sei K ein geordneter Körper. Für $x \in K$ wird

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \text{ und} \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Absolutbetrag von x genannt. Zeige, dass für $x, y, r \in K$ mit $r \geq 0$ gilt:
(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(c) $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
(d) $|xy| = |x||y|$ und insbesondere $|-x| = |x|$ sowie $|x|^2 = x^2$.
(e) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ und insbesonder $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ falls $y \neq 0$.
(f) $|x + y| \leq |x| + |y|$
(g) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Aufgabe 1.4. Sei K ein geordneter Körper. Für $x, y \in K$ wird

$$d(x, y) := |y - x|$$

der Abstand zwischen x und y genannt. Zeige mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe, dass für $x, y, z, v, t, m, r \in K$ mit $r \geq 0$ gilt:
(a) $d(x, y) \geq 0$
(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(c) $d(m, x) \leq r \Leftrightarrow m - r \leq x \leq m + r$
(d) $d(x, y) = d(y, x)$
(e) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(f) $\big|d(x, z) - d(y, z)\big| \leq d(x, y)$

(g) $d(x+v, y+v) = d(x,y)$
(h) $d(tx, ty) = |t| d(x,y)$

AUFGABE 1.5. Sei K ein geordneter Körper. Für $x, y \in K$ werden

$$\min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \text{ und} \\ y & \text{falls } x > y \end{cases}$$

das Minimum und

$$\max(x,y) := \begin{cases} y & \text{falls } x \leq y \text{ und} \\ x & \text{falls } x > y \end{cases}$$

das Maximum von x und y genannt. Zeige, dass für $x, y \in K$ folgende Identitäten gelten:
(a) $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$
(b) $\max(x,y) - \min(x,y) = |y - x|$
(c) $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|y-x|$
(d) $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}|y-x|$

AUFGABE 1.6. Unter einer strengen Totalordnung auf einer Menge X verstehen wir eine transitive Relation $<$ auf X, die folgende Eigenschaft (Trichotomie) besitzt. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ tritt genau einer (und nur einer) der folgenden drei Fälle ein:

$$\text{entweder } x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x.$$

(a) Sei $\leq$ eine Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y$$

eine strenge Totalordnung auf X definiert ist.
(b) Sei $<$ eine strenge Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

eine Totalordnung $\leq$ auf X definiert ist.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 2

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 2.1. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige mathematische Beispiele.

Die folgenden Aufgaben stellen eine Wiederholung und leichte Verallgemeinerung des Übergangs von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ dar, der in der Vorlesung 'Einführung in die Mathematik' ausführlich behandelt wurde. Die Beweise lassen sich mühelos übertragen. Wir beginnen mit Verknüpfungen auf einer Menge H und konstruieren einen kommutativen Ring R, der H enthält. Für $H = \mathbb{N}$ erhalten wir $R = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.2. Sei H eine nicht leere Menge und $H \times H \xrightarrow{+} H$ eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften. Für alle $a, b, c \in H$ gelte:

(i) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
(iii) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Ein neutrales Element oder additive Inverse (Gruppenaxiome) werden nicht vorausgesetzt.

(a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Quotientenmenge mit $R := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
(b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf R eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
(c) Zeige, dass $(R, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 2.3. In der Situation von Aufgabe 2.2 sei $c \in H$. Betrachte die Abbildung

$$\iota \colon H \to R, \qquad \iota(a) := [a + c, c].$$

(a) Zeige, dass ι nicht von der Wahl von c abhängt.
(b) Zeige, dass ι ein Homomorphismus ist, d.h. $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für $a, b \in H$.
(c) Zeige, dass ι injektiv ist. Wir können daher H mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq R$ identifizieren.
(d) Zeige, dass jedes $g \in R$ von der Form $g = \iota(a) - \iota(b)$ ist, für geeignete $a, b \in H$.
(e) Zeige, dass ι bijektiv ist, wenn wir mit einer Gruppe H beginnen. In diesem Fall liefert die Konstruktion also nichts Neues.

Aufgabe 2.4. In der Situation von Aufgabe 2.2 setzen wir weiters voraus:

(iv) Sind $a, b \in H$, dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: Entweder existiert $x \in H$ mit $a + x = b$; oder $a = b$; oder es existiert $x \in H$ mit $a = b + x$.

Zeige, dass in dieser Situation folgendes gilt:

(a) $\iota(a) \neq 0$, für alle $a \in H$.
(b) $\iota(a) \neq -\iota(b)$ für alle $a, b \in H$.
(c) Zu jedem $g \in R \setminus \{0\}$ existiert $a \in H$ mit $g = \iota(a)$ oder $g = -\iota(a)$.

Identifizieren wir H via ι mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq R$, dann gilt also

$$R \setminus \{0\} = (-H) \cup H \qquad \text{und} \qquad (-H) \cap H = \emptyset,$$

wobei $-H = \{-a : a \in H\}$.

(d) Welche Gruppe R erhalten wir, wenn wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^+$ oder $\mathbb{R}^+$ für H wählen?

Aufgabe 2.5. In der Situation von Aufgabe 2.2 nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \qquad a(bc) = (ab)c, \qquad \text{und} \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

(a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf R eine Operation wohldefiniert ist.
(b) Zeige, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.6. In der Situation von Aufgabe 2.5 zeige weiters:

(a) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
(b) Zeige $\iota(ac) = \iota(a)\iota(c)$ für $a, c \in H$.
(c) Zeige, dass der Ring R ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 3

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 3.1. Leite aus den Inzidenzaxiomen I1 bis I3 folgende Eigenschaften ab:

(a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
(b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
(c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
(d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

Aufgabe 3.2. Zeige, dass das Innere einer Strecke AB stets unendlich viele Punkte enthält. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Erkläre, warum rekursiv $A_1 \in (AB)$ und $A_{n+1} \in (A_nB)$ gewählt werden können, $n \in \mathbb{N}$.
(b) Zeige mittels Induktion nach m, dass $A_m \in (A_nB)$ für alle $m > n$ gilt.
(c) Erkläre, wie daraus folgt, dass die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ paarweise verschieden sind und alle in (AB) liegen.

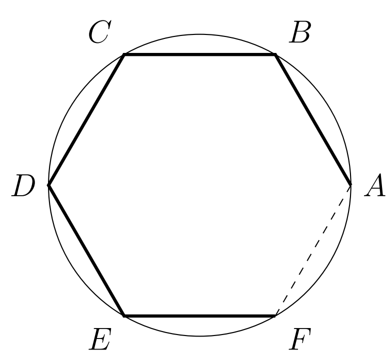
Aufgabe 3.3. Zeige, dass durch jeden Punkt unendlich viele Geraden laufen. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Aufgabe 3.4. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A*B*B'$ und $A*C*C'$. Zeige, dass sich die Strecken (BC') und $(B'C)$ im Inneren des Winkels $\angle CAB$ treffen. Hinweis: Wende, wie in der Vorlesung, Axiom A4 an.

Aufgabe 3.5 (Regelmäßiges Sechseck). Seien A, B, C, D, E, F sechs Punkte auf einem Kreis mit Radius r, die wie in der Skizze angedeutet angeordnet sind und

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = r$$

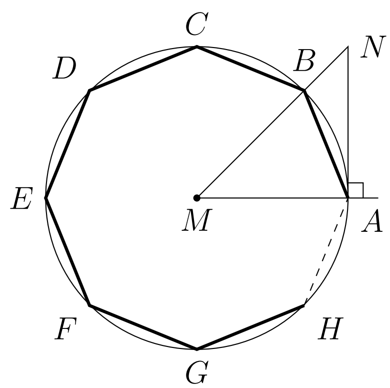
erfüllen. Dabei bezeichnet $|XY|$ den Abstand zweier Punkte X und Y. Erkläre mit Hilfe von Schulwissen, dass auch $|FA| = r$ gilt und die Winkel bei den sechs Ecken A, B, C, D, E, F alle gleich groß sind.



Aufgabe 3.6 (Regelmäßiges Achteck). Betrachte einen Punkt A auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Auf der Geraden durch A und normal auf $g(M, A)$ sei N ein Punkt mit $|AN| = r$. Bezeichne B den Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $g(M, N)$, der zwischen M und N liegt. Schließlich seien A, B, C, D, E, F, G, H acht Punkte auf dem Kreis, die wie in der Skizze angedeutet angeordnet sind und

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GH|$$

erfüllen. Erkläre mit Hilfe von Schulwissen, dass auch $|HA| = |AB|$ gilt und die Winkel bei den acht Ecken A, B, C, D, E, F, G, H alle gleich groß sind.



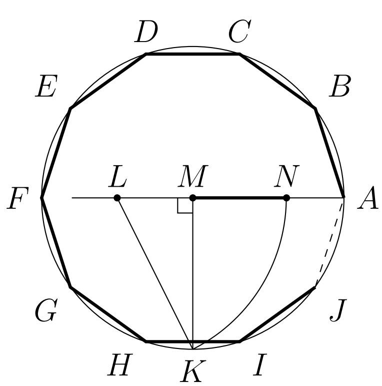
Aufgabe 3.7 (Regelmäßiges Zehneck). Betrachte einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Auf einem Durchmesser seien L und N zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von M mit $|LM| = r/2$ und $|LN| = |LK|$, wobei K einen Schnittpunkt des orthogonalen Durchmessers mit dem Kreis bezeichnet. Sei

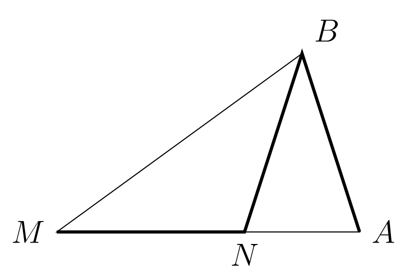
$$a := |MN|$$

und seien $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ zehn Punkte auf dem Kreis, die wie in der Skizze angedeutet angeordnet sind und

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GH| = |HI| = |IJ| = a$$

erfüllen. Erkläre mit Hilfe von Schulwissen, dass auch $|JA| = a$ gilt und die Winkel bei den zehn Ecken $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ alle gleich groß sind.





Zeige dazu der Reihe nach:

(a) $|MN| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$
(b) $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AN|}$
(c) Die Dreiecke AMB und ABN sind ähnlich.
(d) $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABN = \sphericalangle MBN$
(e) $\sphericalangle AMB = 36°$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 4

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 4.1. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken $[BC]$ und $[B'C']$ nicht schneiden. Hinweis: Verwende Axiom A4 oder Proposition 1.2.9.

Aufgabe 4.2. Seien AB und CD zwei Strecken. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(a) Es existiert $X \in (CD)$ mit $AB \equiv CX$.
(b) Es gilt $|AB| < |CD|$, d.h. es existiert $c \in \mathcal{P}$ mit $|AB| + c = |CD|$.
Dabei bezeichnet $\mathcal{P}$, wie in der Vorlesung, die Menge der Kongruenzklassen von Strecken (positive Streckenlängen).

Aufgabe 4.3. Sei X ein Punkt im Inneren eines Winkels $\angle AOB$. Zeige, dass dann der gesamte Halbstrahl $(OX>$ im Inneren dieses Winkels liegt.

Aufgabe 4.4. Seien h, k, l, r vier, vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:
(a) h und l bilden einen Winkel und k liegt im Inneren von $\angle(h, l)$.
(b) h und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Zeige, dass dann auch folgende beiden Aussagen zutreffen:
(c) k und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(k, r)$.
(d) k liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Hinweis: Zeige, dass eine Gerade existiert, die alle vier Halbstrahlen schneidet und wende Lemma 1.2.26 auf die Schnittpukte an.

Aufgabe 4.5. (a) Zeige, dass das Innere einer Strecke konvex ist.
(b) Zeige, dass offene Halbgeraden konvex sind.
(c) Zeige, dass offene Halbebenen konvex sind.
Hinweis: In der Vorlesung, siehe Bemerkung 1.2.27, wurde gezeigt, dass für $X \in (AB)$ stets $(AB) \setminus \{X\} = (AX) \cup (XB)$ und insbesondere $(AX) \subseteq (AB)$ gilt.

Aufgabe 4.6. (a) Zeige, dass Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind.
(b) Zeige, dass das Innere eines Winkels konvex ist.
(c) Zeige, dass das Innere eines Dreiecks konvex ist.

Aufgabe 4.7 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.
(a) Zeige, dass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ Winkel bilden.
(b) Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel. Zeige, dass V konvex ist.
(c) Zeige, dass die Diagonalen (AC) und (BD) in V liegen.
(d) Skizziere Punkte A, B, C, D mit $(AC) \cap (BD) = \emptyset$, für die (a) zutrifft und V leer ist.

Aufgabe 4.8. Unter den Axiomen in Euklids Text findet sich auch folgende Annahme: *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.* Wir interpretieren dies wie folgt: Sei X eine Menge und $\sim$ eine reflexive Relation auf X, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall x, y, z \in X : x \sim z \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim y$$

Zeige, dass $\sim$ dann schon eine Äquivalenzrelation sein muss.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 5

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 5.1. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AB \equiv AC$. Weiters seien $B' \in (BC)$ und $C' \in (B'C)$ so, dass $BB' \equiv CC'$. Zeige, dass $AB'C'$ ein gleichschenkeliges Dreieck bildet.

Aufgabe 5.2. Seien AB und $A'B'$ zwei Strecken, die nicht in einer Geraden liegen und denselben Mittelpunkt M besitzen. Es gilt daher $MA \equiv MB$ und $MA' \equiv MB'$.

(a) Zeige $AA' \equiv BB'$.

(b) Sei weiters $A'' \in (AA')$ und bezeichne B'' den Schnittpunkt von $g(A'', M)$ mit (BB'). Zeige $MA'' \equiv MB''$.

Aufgabe 5.3. Vervollständige den Beweis des Seiten-Seiten-Seiten-Satzes und untersuche dazu den fünften Fall, der in der Vorlesung ausgelassen wurde. Sei also ABC ein Dreieck und sei B'' auf der anderen Seite von $g(A, C)$ wie B so, dass $AB \equiv AB''$ und $CB \equiv CB''$. Bezeichne X den eindeutigen Schnittpunkt der Geraden $g(B, B'')$ mit $g(A, C)$. Betrachte nun den fünften Fall $A * C * X$ und zeige, dass $\angle ABC \equiv \angle AB''C$ gilt.

Aufgabe 5.4. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

Aufgabe 5.5. Sei ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Hinweis: O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt daher $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Verwende den Satz vom Außenwinkel und die Tatsache, dass im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, und umgekehrt.

Bisher haben wir $|AB|$ nur für Strecken AB definiert, im degenerierten Fall setzen wir nun $|AA| := 0$. Es gilt daher $A = B \Leftrightarrow |AB| = 0$.

Aufgabe 5.6. Seien A, B, C drei beliebige Punkte, $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$.

(a) Zeige, $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ und $c \leq a + b$. Hinweis: Aufgrund der Dreiecksungleichung der Vorlesung können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden.

(b) Für $X \in (AB)$ zeige $|CX| \leq \max\{a, b\}$. Hinweis: Nach Aufgabe 5.5 können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden. Erkläre, warum einer der Fälle $C*X*B$, $C = X$ oder $A * X * C$ eintreten muss und diskutiere diese Fälle einzeln.

Aufgabe 5.7. Sei M ein Punkt und $r > 0 \in \mathcal{P}$. Betrachte die Mengen (Kreisscheiben)

$$K := \{X \in \mathcal{E} : |MX| < r\} \qquad \text{und} \qquad \bar{K} := \{X \in \mathcal{E} : |MX| \leq r\}.$$

Zeige, dass K und $\bar{K}$ konvex sind. Hinweis: Verwende Aufgabe 5.6(b).

Aufgabe 5.8. Sei OAB ein gleichschenkeliges Dreieck mit $OA \equiv OB$. Seien A' und B' zwei weitere Punkte auf den Schenkeln, sodass $O * A' * A$ und $O * B' * B$ und $A'A \equiv B'B$ gilt. Bezeichne X den Schnittpunkt von (AB') und $(A'B)$, vgl. Aufgabe 3.4. Weiters sei M der Schnittpunkt von $g(O, X)$ mit (AB). Fertige eine Skizze an und zeige der Reihe nach:

(a) Die Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ sind kongruent.
(b) Die Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ sind kongruent.
(c) Die Dreiecke OAX und OBX sind kongruent.
(d) Die Dreiecke OMA und OMB sind kongruent.

Schließe daraus, dass $(OX>$ die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle AOB$ ist und M mit dem Mittelpunkt der Strecke AB übereinstimmt.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 6

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 6.1. Sei AB ein Strecke. Wähle auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ zwei Punkte C und D so, dass $\angle CAB \equiv \angle DBA$ und $AC \equiv BD$. Bezeichne den Schnittpunkt von $g(A, B)$ und $g(C, D)$ mit M. Fertige eine Skizze an und zeige, dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Gehe anschließend näher auf folgende Punkte ein:

(a) Warum können Punkte C und D so gewählt werden?
(b) Warum haben $g(A, B)$ und $g(C, D)$ genau einen Schnittpunkt?
(c) Warum kann M nicht mit A oder B zusammenfallen?
(d) Warum liegt M im Inneren der Strecke AB?

Aufgabe 6.2 (Streckensymmetrale). Sei AB eine Strecke mit Mittelpunkt M und bezeichne g das Lot auf $g(A, B)$ durch M. Zeige

$$g = \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

Aufgabe 6.3. Sei ABC ein Dreieck. Betrachten wir die Parallele zu $g(A, B)$ durch C, entstehen bei C drei Winkel. Verwende diese Winkel um erneut zu zeigen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks stets $2R$ beträgt.

In den nächsten Beispielen verwenden wir folgende Definition: Vier Punkte ABCD werden als konvexes Viereck bezeichnet, wenn sich die Diagonalen (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden, vgl. Aufgabe 4.7.

Aufgabe 6.4. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zeige, dass sich die Diagonalen AC und BD in ihren Mittelpunkten schneiden. Insbesondere sind Parallelogramme konvexe Vierecke.

Aufgabe 6.5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in ihren Mittelpunkten schneiden. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.6. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|AB| = |CD|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.7. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |DA|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.8.

(a) Skizziere ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|BC| = |DA|$, das kein Parallelogramm ist.
(b) Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \| g(C, D)$, $|BC| = |DA|$ und $|AC| \leq |BC|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.9 (Winkelsumme konvexer Vierecke). Zeige, dass für die Winkelsumme eines konvexen Vierecks $ABCD$ stets

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R$$

gilt. Skizziere ein (nicht konvexes) Viereck, für das diese Gleichung nicht erfüllt ist.

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 7

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 7.1 (S:S:S Ähnlichkeitssatz). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $a' := |B'C'|$, $b' := |C'A'|$, $c' := |A'B'|$, sodass

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

Zeige, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind, d.h. es gilt auch

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta' \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma'.$$

Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S Ähnlichkeitssatzes in der Vorlesung, lässt sich dies mit dem W:W:W Ähnlichkeitssatz auf den SSS Kongruenzsatz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

Aufgabe 7.2. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, sodass C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen. Zeige, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Hinweis: Gehe analog zur Vorlesung vor (Satz 1.5.32).

Aufgabe 7.3 (Sehnensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Wie lässt sich daraus der Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke folgern?

Aufgabe 7.4 (Sekanten-Tangentensatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem äußeren Punkt S des Kreises trifft. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ annehmen dürfen und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um die Dreiecke AST und TSB zu vergleichen. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Aufgabe 7.5 (Sekantensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem äußeren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen können. Verwende dann den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Gib auch einen zweiten Beweis mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Aufgabe 7.6 (Sehnenviereck). Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

Hinweis: Die eine Implikation folgt sofort aus dem Sehnensatz. Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die andere Implikation zu zeigen.

Aufgabe 7.7. Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\}$$

Vereinigung zweier orthogonaler Geraden ist. Hinweis: Verwende die Beschreibung der Winkelsymmetrale aus der Vorlesung.

Aufgabe 7.8. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es genau vier Kreise gibt, die jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 8

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 8.1 (Euklids Tangentenkonstruktion). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt im Äußeren von Γ.

(a) Erkläre, warum die Strecke MA den Kreis Γ in einem Punkt B schneidet.
(b) Sei t die Tangente an Γ im Punkt B und bezeichne Γ' den Kreis mit Mittelpunkt M durch A. Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
(c) Erkläre, warum MC den Kreis Γ in einem Punkt D schneidet.
(d) Zeige, dass die Gerade durch A und D tangential an Γ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an Γ durch A?

Aufgabe 8.2 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei AB Durchmesser eines Kreises Γ. Weiters sei C ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

(a) Liegt C im Inneren von Γ, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt C auf Γ, dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
(c) Liegt C im Äußeren von Γ, dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne D den Schnittpunkt von Γ mit dem Radius durch C. Verwende den Satz vom Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle ADB$ zu vergleichen.

Aufgabe 8.3 (Neunpunktkreis auch Feuerbachkreis). Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Bezeichnen M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der drei Seiten, H_a, H_b, H_c die drei Höhenfußpunkte und N_a, N_b, N_c die Mittelpunkte der Höhenabschnitte HA, HB, HC. Zeige, dass die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, N_c$ auf einem Kreis liegen. Zeige dazu der Reihe nach:

(a) Die Trägergeraden der drei Strecken AB, M_aM_b und N_aN_b sind parallel.
(b) Die Trägergeraden der drei Strecken CH_c, M_aN_b und M_bN_a sind parallel.
(c) $M_aM_bN_aN_b$ bildet ein Rechteck, d.h. ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.
(d) $M_aM_cN_aN_c$ bildet ein Rechteck.
(e) Die sechs Punkte $M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c$ liegen auf dem Kreis mit Durchmesser M_aN_a.
(f) H_a liegt auch auf diesem Kreis.
(g) H_b und H_c liegen ebenfalls auf diesem Kreis.

Aufgabe 8.4 (Nachtrag zum Neunpunktkreis). Die Rechtecke im Beweis der vorangehenden Aufgabe können zu Strecken degenerieren.

(a) Gib ein Dreieck an, für das $C = H = H_a = H_b = N_c$, $M_a = N_b$ und $M_b = N_a$ gilt.
(b) Zeige, dass aber stets $M_a \neq M_b$, $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$ gilt.
(c) Vervollständige den Beweis in der vorigen Aufgabe im Fall degenerierter Rechtecke.
(d) Gib ein Dreieck an, für das $H_a = M_a$ gilt.
(e) Erkläre, warum stets $H_a \neq M_b$ gilt.
(f) Kann H_a mit N_a zusammenfallen?

Aufgabe 8.5 (Winkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Seite BC. Zeige:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Sei E der Schnittpunkt von $g(A,B)$ mit der Parallelen zu $g(D,A)$ durch C. Zeige

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

und verwende eine Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung.

Aufgabe 8.6 (Außenwinkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und seien D, F zwei Punkte mit $B * C * D$ und $B * A * F$. Zeige:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Dies lässt sich analog zum Winkelhalbierendensatz beweisen.

Aufgabe 8.7 (Kreis des Apollonius). Seien A und B zwei verschiedene Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\}$$

einen Kreis bildet und drücke seinen Radius durch λ und $\delta := |AB|$ aus.

Nimm zunächst $\lambda > 1$ an und gehe wie folgt vor:

(a) Erkläre, warum auf der Strecke AB genau ein Punkt C mit $|CA| = \lambda|CB|$ existiert und drücke $|CB|$ durch λ und δ aus.

(b) Erkläre, warum auf dem Strahl $A(B>$ genau ein Punkt D mit $|DA| = \lambda|DB|$ existiert und drücke $|DB|$ durch λ und δ aus.

(c) Erkläre, warum auf $g(A,B)$ keine weiteren Punkte X mit $|XA| = \lambda|XB|$ existieren.

(d) Drücke den Radius des Kreises Γ mit Durchmesser CD durch λ und δ aus.

(e) Sei X ein Punkt mit $|XA| = \lambda|XB|$, der nicht auf $g(A,B)$ liegt. Zeige der Reihe nach: Der Strahl $(XC>$ halbiert den Winkel $\angle AXB$; der Strahl $(XD>$ halbiert den Winkel $\angle BXF$, wobei $A*X*F$; der Winkel $\angle CXD$ ist ein rechter; und $X \in \Gamma$. Schließe daraus:

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \subseteq \Gamma.$$

(f) Zeige $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$, wobei Γ' den analogen Kreis für einen weiteren Parameter λ' mit $1 < \lambda' \neq \lambda$ bezeichnet.

(g) Verwende (f), um die umgekehrte Inklusion $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \supseteq \Gamma$ zu zeigen.

Welche Mengen erhalten wir in den Fällen $\lambda = 1$ und $0 < \lambda < 1$?

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 9

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 9.1. (a) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.
(b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Zeige

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1.$$

Aufgabe 9.2 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

Aufgabe 9.3. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und sei O ein weiterer Punkt auf dieser Geraden, der verschieden von A, B und C ist. Zeige

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CO}{OA} = -1.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Absolutbeträge beider Seiten übereinstimmen und führe anschließend eine geeignete Fallunterscheidung durch, um auch das Vorzeichen zu überprüfen.

Aufgabe 9.4. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \| g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

Aufgabe 9.5 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B) \| g(A', B')$ und $g(B, C) \| g(B', C')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A)$ und $g(C', A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

Aufgabe 9.6 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B') \| g(B, A')$ und $g(B, C') \| g(C, B')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A')$ und $g(A, C')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 9.3.

Aufgabe 9.7 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a, H_b und H_c. Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

Aufgabe 9.8 (Inkreismittelpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Verwende den Winkelhalbierendensatz, siehe Aufgabe 8.5.

Aufgabe 9.9 (Odoms Konstruktion des goldenden Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A * B * C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende den Sehnensatz aus Aufgabe 7.3.

Aufgabe 9.10 (Goldenes Dreieck). Teile X die Strecke AB im goldenen Schnitt, d.h. X liege im Inneren von AB und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Sei C ein weiterer Punkt mit $|AB| = |AC|$ und $|BC| = |AX|$. Zeige, dass die Dreiecke ABC und CBX ähnlich sind und schließe daraus

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$$

sowie $5\sphericalangle CAB = 2R$ und $5\sphericalangle ABC = 4R$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 10

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 10.1. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Zeige, dass drei verschiedene Punkte A, B, C genau dann kollinear sind, wenn gilt:

$$x(B) - x(A) \parallel x(C) - x(B)$$

Zeige weiters, dass in diesem Fall gilt:

$$x(B) - x(A) = \frac{AB}{BC} \cdot \bigl(x(C) - x(B)\bigr)$$

Aufgabe 10.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in $\mathcal{E}$ mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass C auf $g := g(A, B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
(b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g, für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g, für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
(d) Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

Aufgabe 10.3 (Koordinaten des Streckenmittelpunkts). Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$ und bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke AB. Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Mittelpunkts $x(M)$ aus den Koordinaten der Endpunkte $x(A)$ und $x(B)$ berechnet werden können und beweise diese Formel.

Aufgabe 10.4. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A, B)$ und $h := g(C, D)$ auf drei verschiedene Arten:

(a) Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
(b) Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
(c) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die duch Einsetzen entsteht.

Aufgabe 10.5 (Schwerpunkt in Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu das Koordinatensystem $(O, X_1, X_2) = (A, B, C)$, beschreibe die drei Schwerlinien in diesen Koordinaten und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden. Schließe daraus auch $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$, wobei M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen. Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Schwerpunkts in einem beliebigen affinen Koordinatensystem aus den Koordinaten der Eckpunkte A, B, C berechnet werden können.

Aufgabe 10.6 (Satz von Menelaos mittels Koordinaten). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

Aufgabe 10.7 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 10.8 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Der Quotient von Teilverhältnissen $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird als Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D bezeichnet. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die entsprechende Koordinatenabbildung bezeichnet. Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 11

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 11.1. Zeige, dass für $v, w \in \mathbb{R}^2$ folgende Identitäten gelten:

(a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$ Parallelogrammgleichung

(b) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big)$ Polarisierungsidentität

Aufgabe 11.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, g eine Gerade mit Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = b\}$ und P ein weiterer Punkt in $\mathcal{E}$. Leite folgende Formel für den Normalabstand her:

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

Betrachte nun Punkte A, B, C, D, E mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix}13\\6\end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}, \quad x(E) = \begin{pmatrix}-6\\-11\end{pmatrix}$$

und bezeichne g die Gerade durch A und B.

(a) Welcher der Punkte C, D, E hat kleinsten Normalabstand von g?

(b) Gib auf jeder Seite von g einen Punkt mit Normalabstand 7 an.

Aufgabe 11.3 (Polare und Tangenten). Sei

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - M, X - M\rangle = r^2\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer, von M verschiedener Punkt, dann wird die Gerade

$$p = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle A - M, X - M\rangle = r^2\}$$

die Polare von A bezüglich Γ genannt. Zeige:

(a) Liegt A auf Γ dann ist p die Tangente bei A.

(b) Liegt A im Äußeren von Γ dann schneidet p den Kreis in zwei Punkten und dies sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten durch A an Γ.

(c) Liegt A im Inneren von Γ dann haben p und Γ leeren Schnitt.

Hinweis: Verwende die Formel in Aufgabe 11.2, um den Normalabstand $d(p, M)$ zu berechnen.

Aufgabe 11.4. Betrachte einen Kreis Γ und zwei Punkte A, B in $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Gamma = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 25\right\}, \qquad A = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A auf Γ liegt und gib eine Gleichung der Tangente bei A an Γ an.

(b) Zeige, dass B im Äußeren von Γ liegt und bestimme Gleichungen der beiden Tangenten durch B an Γ. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Aufgabe 11.5 (Streckensymmetrale mittels kartesischer Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$s = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = |PB|\}$$

eine Gerade bildet, die orthogonal auf die Gerade $g(A, B)$ steht.

Aufgabe 11.6 (Umkreismittelpunkt mittels kartesischer Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 11.7 (Kreis des Apollonius mit kartesischen Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut (vgl. Aufgabe 8.7) zu zeigen, dass die Menge

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = \lambda |PB|\}$$

einen Kreis bildet. Wähle dazu das Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Koordinatenachse liegt, und zeige, dass die definierende Gleichung von Γ zu einer Kreisgleichung äquivalent ist. Drücke den Radius durch λ und $|AB|$ aus. Zeige auch, dass der Kreismittelpunkt M auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und drücke das Teilverhältnis $\frac{AM}{MB}$ durch λ aus.

Aufgabe 11.8 (Potenzgerade in kartesischen Koordinaten). Betrachte zwei Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$p = \{P \in \mathcal{E} : |PM|^2 - r^2 = |PM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade bildet, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Leite auch eine Formel für $d(M, p)$ her, die diesen Normalabstand durch r, r' und $d := |MM'|$ ausdrückt. Hinweis: Zeige, dass die definierende Gelichung von p äquivalent zu einer linearen Gleichung ist.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

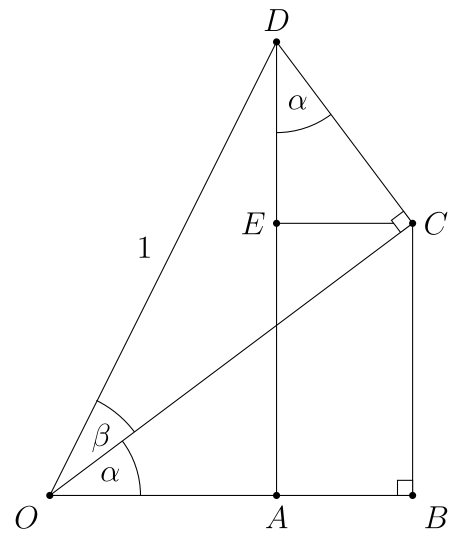
Übungsblatt 12

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 12.1. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ alle zwischen $0°$ und $90°$ liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

Aufgabe 12.2.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige

$$\cos\big((n+1)\alpha\big) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big).$$

Hinweis: Wende das Additionstheorem auf $\cos((n+1)\alpha)$ und $\cos((n-1)\alpha)$ an.

(b) Verwende (a), um folgende Formeln zu überprüfen:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$
$$\cos(5\alpha) = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

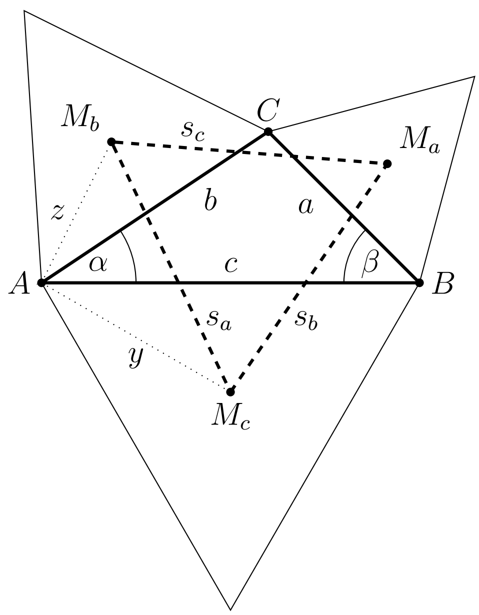
(c) Zeige mit Hilfe der letzten Formel in (b), dass

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hinweis: $\cos(5\cdot 18°) = 0$.

Aufgabe 12.3. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SSS, SWS, WSW, SWW, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

Aufgabe 12.4 (Satz von Napoleon). Werden über jeder Seite eines Dreiecks ABC außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden ihre Mittelpunkte selbst ein gleichseitiges Dreieck. Beweise diesen Satz trigonometrisch wie folgt:



(a) Zeige $b/2 = z\cos 30°$, $c/2 = y\cos 30°$ und
$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(30° + \alpha + 30°).$$
(b) Schließe daraus $y = c/\sqrt{3}$, $z = b/\sqrt{3}$ und
$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha.$$
(c) Erkläre, wie daraus folgt:
$$3s_a^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\alpha}{a}.$$
(d) Erkläre, warum auch folgende Relationen gelten:
$$3s_b^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\beta}{b}$$
$$3s_c^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\gamma}{c}.$$
(e) Wie folgt daraus $s_a = s_b = s_c$?

Aufgabe 12.5.

(a) Seien A, B, C drei 2×2-Matrizen. Zeige $A(B+C) = AB + AC$ und $A(BC) = (AB)C$ ohne die Summenschreibweise zu verwenden.

(b) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne $A(B+C)$, $AB+AC$, $(AB)C$ und $A(BC)$ direkt, d.h. ohne Zuhilfenahme der Rechenregel in (a).

(c) Berechne A^{-1} und gib eine 2×2-Matrix X an, für die $AX = B$ gilt.

Aufgabe 12.6. Betrachte die affinen Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(b) Gib die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(c) Berechne $\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.7. (a) Bestimme eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich eines affinen Koordinatensystems haben die Punkte P, Q, R, S Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(S) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich eines weiteren affinen Koordinatensystems haben P, Q, R Koordinaten

$$x'(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x'(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x'(R) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten $x'(S)$. Hinweis: Es existiert eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$ für alle Punkte Z gilt.

Aufgabe 12.8.

(a) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 4\right\}$ in der Form $\sigma(x) = Ax + b$ an.

(b) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 3\right\}$ in der Form $\sigma'(x) = A'x + b'$ an.

(c) Zeige, dass die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ eine Rotation ist und bestimme ihr Zentrum sowie ihren Drehwinkel.

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 13

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 13.1. Berechne alle Matrizenprodukte der Form XY, sofern sie definiert sind, wobei X und Y zwei der folgenden Matrizen bezeichnen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. berechne alle Produkte der Form $A^2, AB, AC, \dots, BA, B^2, BC, \dots, FD, FE, F^2$, sofern diese definiert sind.

Aufgabe 13.2. Bestimme die Ränge folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Aufgabe 13.3. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig, welche bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, und welche bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$? Gib jeweils auch die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Teilraums an sowie eine Basis des aufgespannten Teilraums, die aus einigen der angegebenen Vektoren besteht.

(a) $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(c) $n = 4$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(d) $n = 5$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\3\\6\\10\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\6\\12\\20\\15\end{pmatrix}.$$

(e) $n = 6$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\7\\5\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\6\\5\\5\\7\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\10\\6\\7\\5\\7\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.4. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\-6\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\\-8\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}5\\9\\4\\2\end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix}6\\7\\-4\\-6\end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden und gib vier dieser Vektoren v_i an, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Gib auch vier dieser Vektoren an, die keine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe 13.5. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & -6x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +7x_2 & -3x_3 & +9x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +6x_2 & -10x_3 & +8x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & -14x_3 & +11x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -9x_2 & +16x_3 & -8x_4 & -7x_5 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.6. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & +6x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 0 \\ 3x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +17x_6 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & -5x_5 & -2x_6 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & +10x_2 & +14x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +12x_2 & +18x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -12x_2 & -15x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +14x_2 & +19x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.7. (a) Welche Dimension muss der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems mit 17 Gleichungen in 39 Unbekannten mindestens haben?

(b) Wieviele lineare Gleichungen sind jedenfalls notwendig um einen 15-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^{27}$ zu beschreiben?

(c) Gib für jedes $k = 2, 3, 4, 5$ ein System von 3 homogenen linearen Gleichungen in fünf Variablen an, dessen Lösungsraum k-dimensional ist. Warum ist dies für $k \leq 1$ und $k \geq 6$ nicht möglich?

Aufgabe 13.8. Betrachte lineare Abbildungen:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$
(b) $\psi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^6$
(c) $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ mit $\operatorname{rank}(\rho) = 3$
(d) $\chi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ mit $\dim\ker(\chi) = 2$
(e) $\kappa\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ mit $\dim\operatorname{img}(\kappa) = 6$

Beantworte (und begründe) für jede der Abbildungen in (a) bis (e):

- Muss jede solche Abbildung injektiv sein?
- Kann eine solche Abbildung auf keinen Fall injektiv sein?
- Muss jede solche Abbildung surjektiv sein?
- Kann eine solche Abbildung auf keinen Fall surjektiv sein?

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 14

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 14.1. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +6z & = & -7 \\ 2x & +5y & -14z & = & 16 \\ 3x & +9y & -23z & = & 28 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +16x_2 & +14x_3 & +12x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & +24x_2 & +22x_3 & +23x_4 & = & 15 \\ -2x_1 & -16x_2 & -11x_3 & +3x_4 & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -4x_4 & = & -10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +13x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 14.2. (a) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 7x_1 & -7x_2 & -14x_3 & +7x_4 & -7x_5 & = & -21 \\ x_1 & & +x_3 & +8x_4 & +10x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & -x_2 & & +10x_4 & +11x_5 & = & 12 \\ -3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -8x_4 & -4x_5 & = & 0 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

(b) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +5x_5 & & +7x_7 & +11x_8 & = & 13 \\ & & & x_4 & +17x_5 & & & +19x_8 & = & 23 \\ & & & & & x_6 & +29x_7 & & = & 31 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung.

Aufgabe 14.3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.4. Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 13 & 16 & 13 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse A^{-1} sowie eine Matrix X, für die $AX = B$ gilt.

Aufgabe 14.5. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x/2 + y/2 + z/2 + w/2 \\ x/2 + y/2 - z/2 - w/2 \\ x/2 - y/2 + z/2 - w/2 \\ x/2 - y/2 - z/2 + w/2 \end{pmatrix},$$

bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

Aufgabe 14.6. Zeige, dass eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch ihre Eckensummen

$$\begin{aligned} e &:= b + c + d \\ f &:= a + c + d \\ g &:= a + b + d \\ h &:= a + b + c \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt ist und drücke die Eintragungen von A durch e, f, g, h aus. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen e, f, g, h stets eine Matrix A mit diesen Eckensummen?

Aufgabe 14.7. (a) Beschreibe den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum in $\mathbb{R}^4$ durch eine lineare Gleichung.

(b) Beschreibe

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 12 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch ein lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 14.8.

(a) Seien $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Zeige $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.
(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen mit $AB = I$. Zeige $BA = I$.
(c) Gib zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ an, sodass $AB = I$ und $BA \neq I$.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 15

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 15.1. Zeige durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

für beliebige 2×2-Matrizen A und B gilt.

Aufgabe 15.2. (a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, dessen Eckpunkte folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, sodass das Dreieck ADC Flächeninhalt 1 hat.

Aufgabe 15.3. Berechne folgende Determinanten, einmal mit der Regel von Sarrus und einmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 15.4. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -2x & +y & -7z & = & -5 \\ x & +3y & +4z & = & 3 \\ -3x & -2y & -9z & = & -7 \end{array}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

Aufgabe 15.5. Beschreibe die Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung. Erkläre zwei verschiedene Lösungswege: Verwende beim einen das Kreuzprodukt und gehe beim anderen wie in Aufgabe 14.7 vor.

Aufgabe 15.6. Betrachte die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme eine Gerade h, die g_1 und g_2 orthogonal schneidet.

Aufgabe 15.7 (Normalabstand eines Punktes von einer Ebene). Seien P ein Punkt und ε eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Unter dem Normalabstand von P zu ε verstehen wir den Abstand $d(P, \varepsilon) := \|F - P\|$, wobei F den Fußpunkt des Lots durch P auf ε bezeichnet.

(a) Sei $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x\rangle = b\}$ eine Ebene in Normalvektordarstellung mit Normalvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch n, b, P ausdrückt und beweise sie.
(b) Sei $\varepsilon = \{Q + sv + tw : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene in Parameterdarstellung mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch Q, v, w, P ausdrückt und beweise sie.

Aufgabe 15.8. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto x \times v$ und bezeichnen die entsprechende 3×3-Matrix mit A_x. Für $x, v \in \mathbb{R}^3$ gilt daher

$$A_x v = x \times v.$$

(a) Gib die Matrix A_x an.
(b) Zeige, dass die Matrizengleichung

$$A_x A_y - A_y A_x = A_{x \times y}$$

für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2022 (UE 250163)

Übungsblatt 16

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 16.1. Berechne die Eigenwerte folgender Matrizen und gib Basen aller Eigenräume an. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.2. (a) Zeige, dass die Spiegelungsmatrix

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

für jeden Winkel α diagonalisierbar ist und gib eine Basis aus Eigenvektoren an.
(b) Zeige, dass die Rotationsmatrix

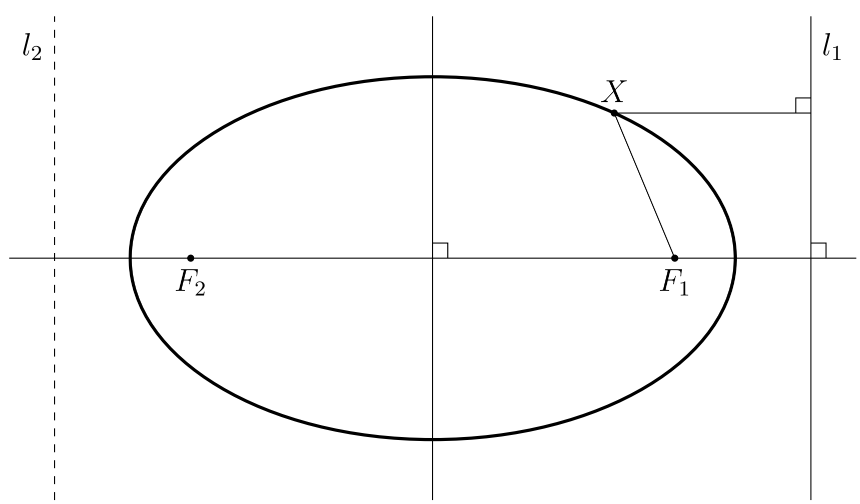
$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

für $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ nicht diagonalisierbar ist. Wie verhält es sich bei $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 180^\circ$?

Aufgabe 16.3 (Leitlinie einer Ellipse). Sei E eine Ellipse mit Halbachsen $a > b$ und numerischer Exzentrizität $\varepsilon = e/a = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Die beiden Parallelen zur Nebenachse im Abstand $a/\varepsilon = a^2/e$ werden *Leitlinien* der Ellipse genannt. Sei F_1 ein Brennpunkt der Ellipse und bezeichne l_1 jene Leitlinie, die auf der selben Seite der Nebenachse liegt wie F_1. Zeige mit Hilfe eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems

$$E = \big\{ X \in \mathcal{E} : |XF_1| = \varepsilon \cdot d(X, l_1) \big\},$$

wobei $d(X, l_1)$ den Normalabstand von X zu l_1 bezeichnet.



Aufgabe 16.4 (Gleichung einer Hyperbel in erster Hauplage). Sei H eine Hyperbel. Weiters sei $\chi\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystem, sodass der Mittelpunkt der Hyperbel den Koordinatenursprung bildet und die beiden Brennpunkte der Hyperbel auf der ersten Koordinatenachse liegen. Zeige

$$\chi(H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

wobei a die große und b die kleine Halbachse der Hyperbel bezeichnen. Gehe dabei wie in der Vorlesung vor, wo die Gleichung einer Ellipse in Hauptlage hergeleitet wurde.

Führe in den folgenden Aufgaben eine Hauptachsentransformation durch, um den Typ der durch die Gleichung beschriebenen Kurve in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen. Gib jeweils die Halbachsen a, b und die lineare Exzentrizität e an, bzw. den Halbparameter p, wenn es sich um eine Parabel handelt. Gib die Koordinaten des Mittelpunkts, der Brennpunkte und der Scheitel an. Gib Gleichungen der Achsen an, bzw. eine Gleichung der Leitlinie falls es sich um eine Parabel handelt sowie Gleichungen der Asymptoten wenn eine Hyperbel vorliegt. [1]

Aufgabe 16.5.

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$$

Aufgabe 16.6.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

Aufgabe 16.7.

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra für das LA, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

[1] Beispiele aus: Mitsch, Lineare Algebra und Geometrie II. Prugg Verlag, Eistenstadt, 1979.