Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

10. Übungsblatt für die Woche vom 20. bis 24. Mai 2019

Aufgabe 10.1. Zeige, dass zwei nicht-degenerierte lineare Gleichungen genau dann dieselbe Gerade in $\mathbb{R}^2$ beschreiben, wenn die eine ein Vielfaches der anderen ist. Seien dazu $a_1, a_2, b, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0) \neq (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b} \right\}$$

genau dann gilt, wenn $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

Aufgabe 10.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in $\mathcal{E}$ mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass C auf $g := g(A, B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
(b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g, für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g, für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
(d) Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

Aufgabe 10.3 (Koordinaten des Streckenmittelpunkts). Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$ und bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke AB. Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Mittelpunkts $x(M)$ aus den Koordinaten der Endpunkte $x(A)$ und $x(B)$ berechnet werden können und beweise diese Formel.

Aufgabe 10.4. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A, B)$ und $h := g(C, D)$ auf drei verschiedene Arten:

(a) Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
(b) Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
(c) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die duch Einsetzen entsteht.

Aufgabe 10.5 (Schwerpunkt in Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu ein beliebiges affines Koordinatensystem, beschreibe die drei Schwerlinien in Koordinaten durch Parameterdarstellungen, zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden und gib eine Formel für die Koordinaten des Schwerpunkts an. Schließe daraus auch $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$, wobei M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen.

Aufgabe 10.6 (Satz von Menelaos mittels Koordinaten). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

Aufgabe 10.7 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 10.8 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Der Quotient von Teilverhältnissen $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird als Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D bezeichnet. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die entsprechende Koordinatenabbildung bezeichnet. Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 10.1. Die eine Implikation ist offensichtlich: Gilt $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$ für ein $\lambda \neq 0$, dann sind die Gleichungen $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ und $\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b}$ äquivalent und haben daher dieselbe Lösungsmenge. Für die umgekehrte Implikation sei nun

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b} \right\}.$$

Da a_1 und a_2 nicht beide verschwinden können, nehmen wir o.B.d.A. $a_2 \neq 0$ an. Dann erfüllen die Komponenten von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b/a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ (b - a_1)/a_2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$. Nach Voraussetzung müssen sie daher auch der anderen Gleichung $\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b}$ genügen und wir erhalten:

$$\tilde{a}_2 b / a_2 = \tilde{b} \qquad \text{und} \qquad \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 (b - a_1)/a_2 = \tilde{b}.$$

Subtraktion führt auf $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 a_1 / a_2$. Für $\lambda = \tilde{a}_2 / a_2$ gilt daher $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

Zu Aufgabe 10.2. a) Wir berechnen

$$x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $x(A) - x(C) = 2\big(x(B) - x(A)\big)$, also $C \in g(A, B)$ und $\frac{CA}{AB} = 2$. Analog erhalten wir $x(C) - x(A) = -\frac{2}{3}(x(B) - x(C))$ und daher $\frac{AC}{CB} = -2/3$.

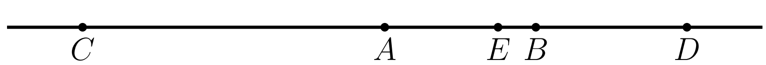
b) Für den Punkt D soll $x(A) - x(D) = -2\big(x(B) - x(A)\big)$ gelten, also

$$x(D) = x(A) + 2\big(x(B) - x(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

c) Für den Punkt E soll $x(E) - x(A) = 3\big(x(B) - x(E)\big)$ gelten, also

$$x(E) = \tfrac{1}{4} x(A) + \tfrac{3}{4} x(B) = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

d)



Zu Aufgabe 10.3. Aus $\frac{AM}{MB} = 1$ erhalten wir $x(M) - x(A) = 1 \cdot (x(B) - x(M))$, also

$$x(M) = \tfrac{1}{2}\big(x(A) + x(B)\big) = \tfrac{1}{2} x(A) + \tfrac{1}{2} x(B).$$

Zu Aufgabe 10.4. Wir berechnen Richtungsvektoren der Geraden $x(g)$ und $x(h)$,

$$x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(D) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und erhalten die Darstellungen:

$$x(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 4 \right\},$$
$$x(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + x_2 = 7 \right\}.$$

a) Die beiden Komponenten der Vektorgleichung $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ liefern das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8 + 2t &= 1 + s \\ 10 + 3t &= 4 - 3s \end{aligned}$$

mit eindeutiger Lösung $t = -3$ und $s = 1$. Für den Schnittpunkt erhalten wir

$$x(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Gleichungen der beiden Geraden führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit eindeutiger Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Wir erhalten erneut $x(S) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Einsetzen der Parameterdarstellung von $x(g)$ in die Gleichung von $x(h)$ führt auf die Gleichung

$$3(8 + 2t) + (10 + 3t) = 7$$

mit eindeutiger Lösung $t = -3$. Wir erhalten erneut $x(S) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe 10.5. Bezeichen $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Nach Aufgabe 10.3 gilt für die Koordinaten der Seitenmittelpunkte:

$$x(M_a) = \tfrac{1}{2}(x(B) + x(C)), \qquad x(M_b) = \tfrac{1}{2}(x(C) + x(A)), \qquad x(M_c) = \tfrac{1}{2}(x(A) + x(B)).$$

Die Schwerlinien haben daher die Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} &\{x(A) + t(x(M_a) - x(A)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ &\{x(B) + t(x(M_b) - x(B)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ &\{x(C) + t(x(M_c) - x(C)) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Der Parameter $t = 2/3$ führt in jeder der drei Geraden auf denselben Punkt, nämlich

$$x(S) = \tfrac{1}{3}x(A) + \tfrac{1}{3}x(B) + \tfrac{1}{3}x(C) = \tfrac{1}{3}\big(x(A) + x(B) + x(C)\big).$$

Daraus erhalten wir auch die Teilverhältnisse $\frac{SA}{AM_a} = \frac{SB}{BM_b} = \frac{SC}{CM_c} = -\frac{2}{3}$ und dann mit Lemma 2.1.8 $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$. Alternativ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} x(S) - x(A) &= -\tfrac{2}{3}x(A) + \tfrac{1}{3}x(B) + \tfrac{1}{3}x(C), \\ x(M_a) - x(S) &= -\tfrac{1}{3}x(A) + \tfrac{1}{6}x(B) + \tfrac{1}{6}x(C), \end{aligned}$$

erhalten $x(S) - x(A) = 2(x(M_a) - x(S))$ und daher $\frac{AS}{SM_a} = 2$. Analog lässt sich auch $\frac{BS}{SM_b} = 2$ und $\frac{CS}{SM_c} = 2$ direkt, d.h. ohne Verwendung von Lemma 2.1.8 verifizieren.

Zu Aufgabe 10.6. Die Punkte A', B' und C' haben Koordinaten

$$x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix}, \qquad x(B') = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = \begin{pmatrix} 1-c' \\ c' \end{pmatrix},$$

wobei $a', b', c' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Für die Teilverhältnisse erhalten wir:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{1-b'}{b'}, \qquad \frac{BC'}{C'A} = \frac{1-c'}{c'}, \qquad \frac{CA'}{A'B} = \frac{a'}{1-a'}.$$

Es gilt daher:

$$\begin{aligned} A', B', C' \text{ kollinear} &\Leftrightarrow C' \in g(A', B') \\ &\Leftrightarrow x(C') - x(A') \| x(B') - x(A') \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-c' \\ c'-a' \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -(1-c')a' - (c'-a')b' = 0 \qquad \text{(Lemma 2.3.28)} \\ &\Leftrightarrow (1-b')(1-c')a' = -b'c'(1-a') \\ &\Leftrightarrow \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 10.7. In diesen Koordinaten ist g' durch $x_2 = \lambda$ gegeben, wobei $\lambda \neq 0$. Bezeichnet $x \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung dann gilt

$$x(A') = \lambda x(A), \qquad x(B') = \lambda x(B), \qquad x(C') = \lambda x(C).$$

Multiplizieren wir

$$x(C) - x(A) = \frac{AC}{CB}\big(x(B) - x(C)\big)$$

mit λ erhalten wir daher

$$x(C') - x(A') = \frac{AC}{CB}\big(x(B') - x(C')\big),$$

also $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$.

Zu Aufgabe 10.8. Da A', B' und C' auf einer Geraden liegen sind die Vektoren

$$x(B') - x(A') = \begin{pmatrix} b' \\ b'-a' \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C') - x(A') = \begin{pmatrix} cc' \\ c'-a' \end{pmatrix}$$

parallel. Nach Lemma 2.3.28 gilt daher

$$b'(c'-a') - (b'-a')cc' = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{c'c}{b' - c'c} : \frac{c}{1-c} = \frac{c'(1-c)}{b' - c'c} = \frac{a'}{b'}.$$

Aus demselben Grund gilt $\frac{A'D'}{D'B'} : \frac{AD}{DB} = \frac{a'}{b'}$ und daher die Gleichheit der Doppelverhältnisse.