Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

13. Übungsblatt für die Woche vom 10. bis 14. Juni 2019

Aufgabe 13.1. Berechne alle Matrizenprodukte der Form XY, sofern sie definiert sind, wobei X und Y zwei der folgenden Matrizen bezeichnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. berechne alle Produkte der Form $A^2, AB, AC, \dots, BA, B^2, BC, \dots, FD, FE, F^2$, sofern diese definiert sind.

Aufgabe 13.2. Bestimme die Ränge folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Aufgabe 13.3. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig, welche bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, und welche bilden eine Basis? Gib in jedem Fall die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Teilraums an sowie eine Basis, die aus einigen der angegebenen Vektoren besteht.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(a) $n = 2$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
(b) $n = 3$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
(c) $n = 4$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
(d) $n = 5$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix}.$$
(e) $n = 6$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.4. Zeige, dass die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$
ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden und gib vier dieser Vektoren v_i an, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Gib auch vier dieser Vektoren an, die keine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe 13.5. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)
$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +20x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & -x_2 & -9x_3 & -20x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & -x_2 & -6x_3 & -20x_4 & = & 0 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rrrrrcl} 5x_1 & -5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & & = & 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +2x_4 & -8x_5 & = & 0 \\ -7x_1 & +9x_2 & +13x_3 & -5x_4 & +20x_5 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.6. Für jedes der folgenden beiden Gleichungssysteme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales lineares Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +5x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & +10x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & +9x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -3x_5 & +8x_6 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & -14x_2 & +12x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -9x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +24x_2 & -21x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & -19x_2 & +16x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 13.7. (a) Welche Dimension muss der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems mit 13 Gleichungen in 29 Unbekannten mindestens haben?

(b) Wieviele lineare Gleichungen sind jedenfalls notwendig um einen 17-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^{23}$ zu beschreiben?

Aufgabe 13.8. Gib für jedes $k = 3, 4, 5, 6$ ein System von 3 homogenen linearen Gleichungen in sechs Variablen an, dessen Lösungsraum k-dimensional ist. Warum ist dies für $k \leq 2$ und $k \geq 7$ nicht möglich?

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 13.1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad BE = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -8 \\ 3 & 6 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \qquad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ 0 & -2 \\ 9 & -20 \end{pmatrix} \qquad EF = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad FC = \begin{pmatrix} 10 & -10 \end{pmatrix}$$

Alle anderen Produkte sind nicht definiert.

Zu Aufgabe 13.2. Mittels elementarer Zeilenumformungen bringen wir die Matrizen auf Zeilenstufenform, woraus sich dann alles ablesen lässt. Bei dieser Fragestellung ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\operatorname{rank}(A) = 1$. Da die Matrix A nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(B) = 2$ und daher ist B invertierbar.

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(C) = 1$. Da die Matrix C nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit $\operatorname{rank}(D) = 2$ und daher ist D nicht invertierbar,

(e)

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(E) = 4$ und daher ist E invertierbar.

(f)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(F) = 4$ und daher ist F invertierbar.

(g)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank}(G) = 3$. Da die Matrix G nicht quadratisch ist, kann sie nicht invertierbar sein.

Zu Aufgabe 13.3. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen diese mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, von der sich dann alles ablesen lässt. Auch hier ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 1-dimensional, der erste Vektor bildet eine Basis dieses Teilraums.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 3-dimensional, die ersten drei Vektor bilden eine Basis dieses Teilraums.

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 9 & 5 & 18 \\ 5 & 4 & 3 & 12 & 5 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear abhängig, sie bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$, lassen wir den vierten Vektor weg, erhalten wir eine Basis von $\mathbb{R}^5$.

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab: Die Vektoren sind linear unabhängig, sie bilden kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^6$, der von ihnen aufgespannte Teilraum ist 3-dimensional, sie bilden eine Basis dieses Teilraums.

Zu Aufgabe 13.4. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen diese mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, von der sich dann alles ablesen lässt. Auch hier ist es nicht notwendig, die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 11 & 6 \\ -1 & -1 & -3 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 6 & 8 & 24 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 bilden keine Basis von $\mathbb{R}^4$, denn sie spannen nur einen 3-dimensionalen Teilraum auf.

Zu Aufgabe 13.5. (a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 20 \\ -3 & -1 & -9 & -20 \\ -4 & -1 & -6 & -20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 14 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem hat daher denselben Lösungsraum, wie das System:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & +3x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Dies (und auch das ursprüngliche System) bildet ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum, d.h. mit weniger als drei linearen Gleichungen lässt sich der Lösungsraum nicht beschreiben. Der Lösungsraum ist 1-dimensional, $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\phi(t) = t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

(b) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 2 & -8 \\ -7 & 9 & 13 & -5 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 6 & -12 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem hat daher denselben Lösungsraum, wie das System:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -5x_4 & +6x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & -3x_4 & +4x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Dies (und auch das ursprüngliche System) bildet ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum, d.h. mit weniger als drei linearen Gleichungen lässt sich der Lösungsraum nicht beschreiben. Der Lösungsraum ist 2-dimensional, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des

Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, $\phi\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

Zu Aufgabe 13.6. (a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen folgendes minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum ab:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & +2x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ & & & x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum ist 4-dimensional,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$

$$\phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

(b) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -2 & -14 & 12 \\ -2 & -9 & 7 \\ 3 & 24 & -21 \\ -3 & -19 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen folgendes minimales lineares Gleichungssystem des Lösungsrsaums ab:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum ist 1-dimensional, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Lösungsraums und $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\phi(s) = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

Zu Aufgabe 13.7. Lässt sich ein Teilraum V von $\mathbb{R}^n$ durch m lineare Gleichungen beschreiben, so existiert eine $m \times n$-Matrix A mit $V = \ker(A)$. Da $\operatorname{img}(A)$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist, gilt $\dim \operatorname{img}(A) \leq m$ und mit der Dimensionsformel folgt (siehe Vorlesung)

$$\dim(V) = \dim \ker(A) = n - \dim \operatorname{img}(A) \geq n - m.$$

(a) Aus obiger Ungleichung erhalten wir $\dim(V) \geq n - m = 29 - 13 = 16$, d.h. der Lösungsraum muss mindestens 16-dimensional sein.

(b) Aus obiger Ungleichung erhalten wir $m \geq n - \dim(V) = 23 - 17 = 6$, also werden wenigstens 6 lineare Gleichungen benötigt.

Zu Aufgabe 13.8. Da der Lösungsraum ein Teilraum von $\mathbb{R}^6$ ist, kann er höchstens 6-dimensional sein, also $k \leq 6$. Aus der Dimensionsformel folgt weiters $k \geq 6 - 3 = 3$. Für die verbleibenden k geben wir Koeffizientenmatrizen geeigneter Gleichungssysteme an:

$k = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$k = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$